Alábbi megoldásokban felhasználjuk a következő megjegyzést.

Tekintve, hogy hasonló háromszögekben a szögek egyenlők, nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $a=4$, $b=5$, $c=6$.

I. megoldás: A cosinus-tétel alapján

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+36-16}{60}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4},$$
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{16+25-36}{40}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}.$$

Ennek alapján

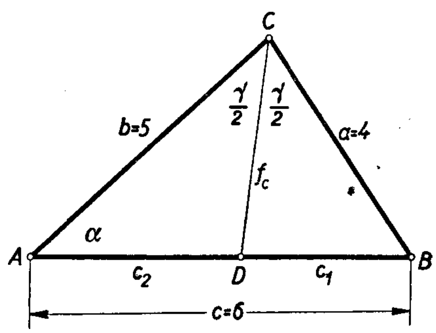
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}=\cos\gamma. \tag{1}$$

Mivel α a legkisebb szög, így hegyesszög, tehát $2\alpha<180^\circ$, és ezért az (1) egyenlőségből következik, hogy

$$2\alpha=\gamma.$$

Zsombók Zoltán (Bp. IV., Könyves Kálmán g. IV. o. t.)

II. megoldás: Szerkesszünk az adott oldalakból háromszöget, és rajzoljuk meg a γ szög f_c felezőjét, amelynek végpontja a c oldalon D (1. ábra).



1. ábra

Legyen $BD=c_1$, $AD=c_2$. Azt kell kimutatnunk, hogy $\alpha=\frac{\gamma}{2}$, pedig akkor és csak akkor áll, ha $c_2=f_c$.

Ismeretes tétel alapján $c_1:c_2=a:b=4:5$, és így

$$c_1=\frac{4}{9}c=\frac{4}{9}\cdot 6=\frac{8}{3}$$

és

$$c_2=\frac{5}{9}\cdot 6=\frac{10}{3}.$$

A 698. feladatban bebizonyítottuk, hogy

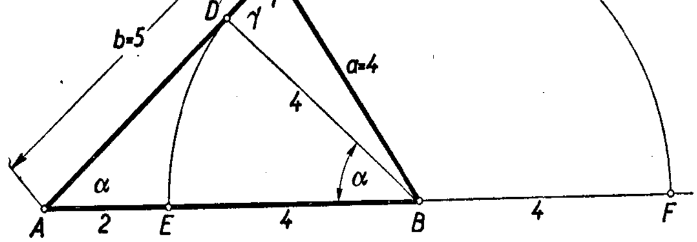
$$f_c=\sqrt{ab-c_1c_2}=\sqrt{20-\frac{80}{9}}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3},$$

tehát tényleg

$$c_2=f_c.$$

Halmágyi Ákos (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. II. o. t.)

III. megoldás: Az oldalaival megadott háromszög B csúcsa körül rajzoljunk $BC=a=4$ sugarú kört. Messe ez az AC oldalt másodszor D-ben, az AB oldalt, ill. annak meghosszabbítását E, ill. F-ben (2. ábra).



2. ábra

Ismeretes, hogy a körhöz egy pontból húzott szelő metszeteinek szorzata állandó, vagyis

$$AD \cdot AC = AE \cdot AF = AD \cdot 5 = 2 \cdot 10,$$

ahonnan

$$AD = \frac{20}{5} = 4.$$

Tehát D az A és C pont között van, és az $ADB\Delta$ egyenlő szárú, vagyis az $ABD\sphericalangle = \alpha$, és így e háromszög $BDC\sphericalangle = \gamma$ külső szöge egyenlő a szemközti két belső szög összegével, vagyis

$$\gamma = 2\alpha.$$

Soós Tibor (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

IV. megoldás: Keressük annak, az oldalakkal kifejezett, szükséges és elégséges feltételét, hogy $2\alpha = \gamma$ teljesüljön. Az 1. ábra jelöléseit használva ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha az ABC és a CBD háromszögek hasonlók, mivel a két háromszög B-nél levő szöge közös. Ugyancsak a közös szög miatt ez a hasonlóság akkor és csak akkor következik ha

$$c_1 : a = a : c.$$

A szögfelező tétel alapján

$$c_1 = \frac{ac}{a+b},$$

és így a keresett szükséges és elégséges feltétel, hogy

$$a^2 = cc_1 = \frac{ac^2}{a+b},$$

vagy átrendezve

$$c^2 = a(a+b)$$

teljesüljön, – feltéve természetesen ezenkívül azt, hogy az a, b, c oldalakból szerkeszthető háromszög.

Feladatunkban $c^2 = 36$, $a(a+b) = 36$, tehát a kritérium teljesül, s így

$$2\alpha = \gamma.$$

Rázga Tamás (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)