I. megoldás: Mivel

$$\cos 36^\circ = \cos 2\cdot 18^\circ = \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ,$$

azért elegendő $\sin 18^\circ$-ot kiszámítani. Ez fele az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög oldalának. Ismeretes a tananyagból, hogy e tízszög oldal hossza $(\sqrt{5}-1)/2$, tehát

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{4} =$$

$$= 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Farkas László (Ózd, József Attila g. IV. o. t.)

II. megoldás: Felhasználva a $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$, továbbá a

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

és a

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

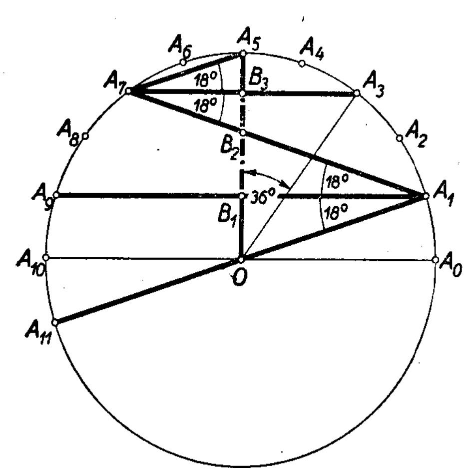
összefüggéseket:

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2\cos 36^\circ \sin 18^\circ =$$

$$= \frac{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ (2\cos 36^\circ)}{2\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2\sin 72^\circ} = \frac{1}{2}.$$

Stahl János (Bp. VI., Kölcsey g. III. o. t.)

III. megoldás: Állításunk bizonyítható goniometriai átalakítások alkalmazása nélkül is, csupán a szögfüggvények értelmezését használva fel. Rajzoljuk meg egy O középpontú egységsugarú körben a szabályos húszszög első 12 csúcspontját A_0, A_1, $\ldots$, A_{11}-et (lásd az ábrát).



Akkor $A_0OA_1\sphericalangle = 18^\circ$, és $A_0OA_3\sphericalangle = 54^\circ$. Húzzuk meg az A_1A_{11}, A_1A_9, A_1A_7, A_7A_3 és A_7A_5 szakaszokat, amelyek az OA_5 sugarat rendre az O, B_1, B_2, B_3, A_5, pontokban metszik. A_1A_9 és A_7A_3 az OA_5-re vonatkozó szimmetria miatt merőlegesek az OA_5 sugárra, és az A_1, valamint A_2-nél keletkező 2–2 szög egyenként 18°-os, mint a kör kerületének 10-ed részén nyugvó kerületi szögek, $A_3OA_5\sphericalangle$ pedig, mint ugyanakkora íven nyugvó középponti szög, 36°-os. A keletkező 22 derékszögű háromszög egybevágósága alapján

$$OB_1 = B_1B_2 \quad \text{és} \quad B_2B_3 = B_3A_5,$$

és így, mivel e négy szakasz összege $OA_5 = 1$, azért

$$B_1B_2 + B_2B_3 = OB_1 + B_3A_5 = \frac{1}{2}.$$

De másrészt

$$B_1B_2 + B_2B_3 = B_1B_3 = OB_3 - OB_1.$$

Az OA_1B_1 és OA_3B_3 derékszögű háromszögek átfogója a körsugár, tehát egységnyi hosszúságú, és az előbbi A_1-nél levű hegyesszöge 18°, az utóbbi O-nál levő hegyesszöge 36°, így

$$\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = OB_3 - OB_1 = \frac{1}{2}.$$

Makkai Mihály (Bp. V., Eötvös g. III. o. t.)