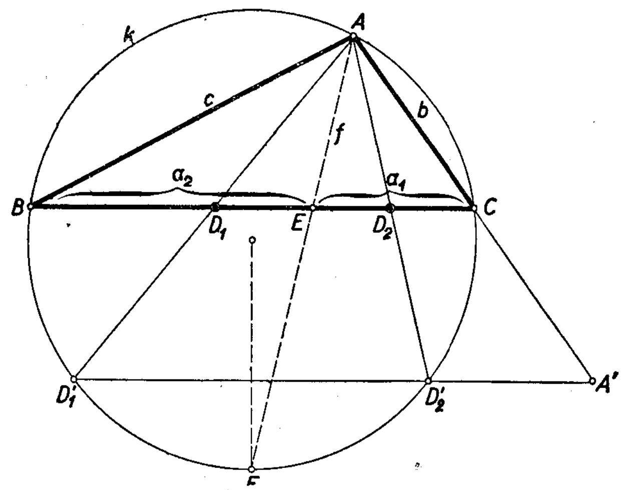
I. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak (1. ábra).



1. ábra

Legyen k az $ABC\Delta$ köré írt kör. Az AD egyenes metszéspontja k-val legyen D'. A húrok szeleteinek szorzatára vonatkozó tétel szerint

$$BD \cdot DC = AD \cdot DD'.$$

De mivel másrészt a feladat követelménye szerint

$$BD \cdot DC = AD^2,$$

azért

$$DD' = AD.$$

Ennek alapján a szerkesztés: A-nak C-re vonatkozó A' tükörképén át párhuzamost húzunk a BC oldallal. E párhuzamos metszi ki a k körből a D_1' és D_2' pontokat. AD_1' és AD_2'-metszéspontjai BC-vel: D_1, ill. D_2 feladatunk megoldásai.

A megoldhatóság feltétele: Legyen a $BAC\sphericalangle = \alpha$ szögfelezőjének metszéspontja a $BC = a$ oldallal E, a k körrel F. Megoldás akkor van, ha $f = AE \leq EF$.

De $AE \cdot EF = CE \cdot EB = a_1 \cdot a_2$, és így a megoldhatóság feltétele így írható:

$$f^2 \leq a_1 a_2.$$

A 688. feladatban bebizonyítottuk, hogy

$$f_a^2 = bc - a_1 a_2,$$

és így a keresett feltétel

$$bc - a_1 a_2 \leq a_1 a_2,$$

vagyis

$$\frac{bc}{a_1 a_2} = \frac{b}{a_1} \cdot \frac{c}{a_2} \leq 2.$$

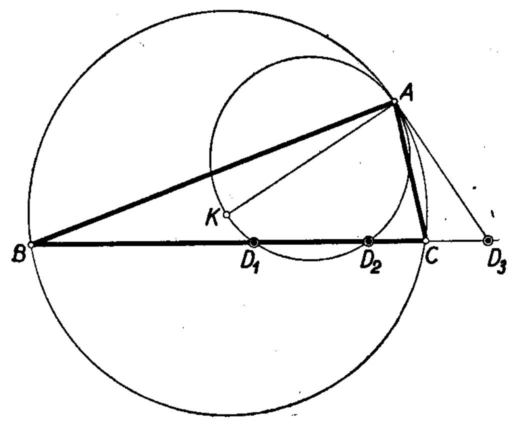
De $\dfrac{b}{a_1} = \dfrac{c}{a_2} = \dfrac{b+c}{a}$, ezért a feltétel $\left(\dfrac{b+c}{a}\right)^2 \leq 2$, és így 2, 1, 0 D pont a szerkeszthető az a oldalon, aszerint, amint

$$b + c \lesseqgtr a\sqrt{2}.$$

Megjegyzés: Könnyű belátni, hogy $\alpha = 90^\circ$ esetén az egyik D pont az átfogóra merőleges magasság talppontja, a másik az átfogó felezőpontja, vagyis a körülírt kör középpontja.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Mint az I. megoldásban láttuk, a D pont a háromszög köré írt K középpontú kör egy A-ból kiinduló húrjának felezőpontja, s mint ilyen, rajta van a KA körsugár fölé rajzolt Thales-körön (2. ábra).



2. ábra

Tehát e kör metszi ki a $BC=a$ oldalból a keresett D pontot.

2, 1 vagy 0 megoldás van aszerint, amint az a oldal távolsága a KA felezőpontjától $\lesseqgtr \frac{r}{2}$, ahol r a körülírt kör sugara.

Megjegyzés: Ha a D pont a BC oldal meghosszabbításán is lehet, akkor annak alapján, hogy a körön kívül fekvő pont hatványa egyenlő a pontból a körhöz húzott érintőszakasz négyzetével, az A pontban a körülírt körhöz szerkesztett érintő metszi ki az a oldalegyenesből a D_3 megoldást (2. ábra). Ez a megoldás mindig van, kivéve, ha $b=c$, mikor is az érintő párhuzamos az egyenlő szárú háromszög a alapjával.

Ádám Antal (Bp. VIII., Széchenyi g. III. o. t.)