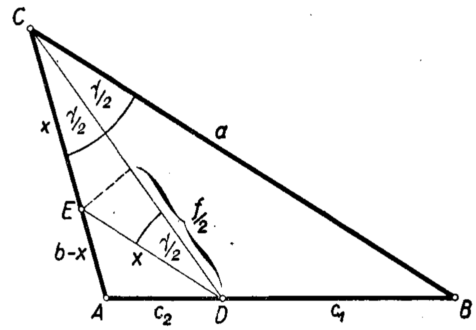
Az alábbiakban f_c helyett rövidebben f-et írunk.

I. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A cosinus-tétel szerint az $ACD_\triangle$ és a $BCD_\triangle$-ből:

$$c_1^2 = a^2 + f^2 - 2af\cos\frac{\gamma}{2}, \qquad c_2^2 = b^2 + f^2 - 2bf\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Mindkét egyenletből kifejezve $cos\frac{\gamma}{2}$-t

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2+f^2-c_1^2}{2af} = \frac{b^2+f^2-c_2^2}{2bf}.$$

Ebből

$$(1) \qquad f^2 = ab + \frac{ac_2^2 - bc_1^2}{a-b}.$$

Ismeretes tétel szerint

$$(2) \qquad c_1 : c_2 = a : b, \qquad \text{innen} \qquad ac_2 = bc_1.$$

Ennek felhasználásával (1) jobboldalán a tört számlálóját átalakítjuk:

$$ac_2^2 = ac_2 \cdot c_2 = bc_1c_2 \qquad \text{és} \qquad bc_1^2 = bc_1 \cdot c_1 = ac_1c_2,$$

mely értékeket (1)-be helyettesítve, máris a bizonyítandó

$$(3) \qquad f^2 = ab - c_1c_2, \qquad \text{azaz} \qquad f = \sqrt{ab - c_1c_2}.$$

egyenlőségre jutunk.

Ahhoz, hogy eredményünket a numerikus példa megoldására alkalmazhassuk, ki kell számítanunk c_1-et és c_2-t.

A c oldalt a cosinus-tétellel nyerhetjük:

$$c^2 = 18^2 + 9^2 - 2\cdot 18\cdot 9\cos 120^\circ = 9^2\left(4+1+2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right), \quad \text{tehát}\, c = 9\sqrt{7}.$$

Ezután (2) szerint c_1-t és c_2-t úgy nyerjük, hogy c-t $\frac{a}{b} = \frac{18}{9} = \frac{2}{1}$ arányban osztjuk, vagyis $c_1 = 6\sqrt{7}$, $c_2 = 3\sqrt{7}$.

Ezen értékeket (3)-ba helyettesítve

$$f = \sqrt{18\cdot 9 - 6\cdot 3\cdot 7} = \sqrt{18(9-7)} = 6\,\text{cm}.$$

Jáky Mária (Pécs, Bányaip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Húzzunk a D ponton át a CB oldallal párhuzamos egyenest. Messe ez CA-t az E pontban (1. ábra). Miután CD szögfelező, CDE egyenlő szárú; szárait jelöljük x-szel. E háromszögből

$$(1) \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{f}{2x}$$

x értékét az $ADE_\triangle$ és $ABC_\triangle$ hasonló voltából számíthatjuk ki:

$$(b-x) : x = b : a, \qquad \text{innen} \qquad x = \frac{ab}{a+b}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve

(2) $$\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\frac{a+b}{ab}f.$$

Felírjuk az $ADC_\triangle$-re a cosinus-tételt:

$$c_2^2=b^2+f^2-2bf\cos\frac{\gamma}{2},$$

majd behelyettesítjük (2)-ből $\cos\frac{\gamma}{2}$-értékét:

(3) $$c_2^2=b^2+f^2-2bf\left(\frac{1}{2}\frac{a+b}{ab}f\right)=b^2+f^2-f^2\frac{a+b}{a}=b^2-f^2\frac{b}{a}.$$

Még egy átalakítást végzünk a szögfelező-tétel felhasználásával. A baloldalon

$$c_2^2=c_2\cdot c_2=c_2\cdot c_1\frac{b}{a}.$$

Ezt (3)-ba helyettesítve, és a nyert egyenletet $\frac{b}{a}$-val szorozva, a

$$c_1c_2=ab-f^2$$

összefüggésre jutunk, amely a bizonyítandó egyenlőségnek átrendezett alakja.

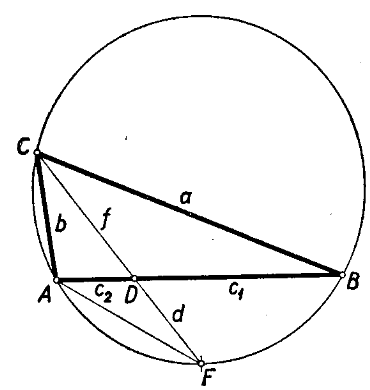
Ez a megoldás az I. megoldásnál nem egyszerűbb, de a kitűzött numerikus példa megoldása ezúttal egészen egyszerű a (2) egyenlet alapján:

$$f=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{2\cdot 18\cdot 9}{27}\cdot\frac{1}{2}=6$$

Kaiser Marianna (Bp. II., Hámán Kató lg. IV. o. t.)

Állításunk szögfüggvények felhasználása nélkül is bizonyítható és a 120°-os szög folytán a numerikus számítás szintén elvégezhető szögfüggvények nélkül, amint ezt az alábbi III. és IV. megoldások mutatják.

III. megoldás: Rajzoljuk meg a háromszög köré írható kört, amelyet a szögfelező meghosszabbítása F pontban metsz. Jelöljük a DF szakaszt d-vel (2. ábra).



2. ábra

A D ponton átmenő szelő szeleteinek szorzataira vonatkozó tétel szerint

(1) $$fd=c_1c_2,$$

másrészt

$$CAF_\triangle\sim CDB_\triangle,$$

C-nél fekvő szögük egyenlő, mert f szögfelező, $F\sphericalangle=B\sphericalangle$, mert mindkettő az AC íven nyugvó kerületi szög, a megfelelő oldalak aránya,

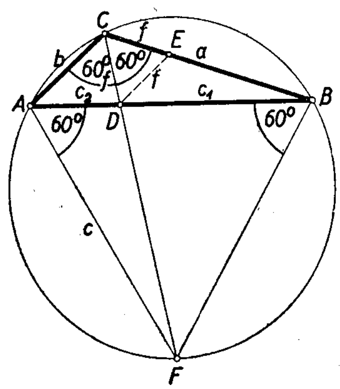
(2) $$b:(f+d)=f:a,$$

vagyis

$$f^2+fd=ab.$$

Helyettesítsük be fd-nek (1) alatt nyert értékét (2)-be, ezzel a bizonyítandó állításhoz jutunk.

A numerikus számítás egyszerűsítésére az adatoknak megfelelő ábra elkészítése (3. ábra) nyújt lehetőséget.



3. ábra

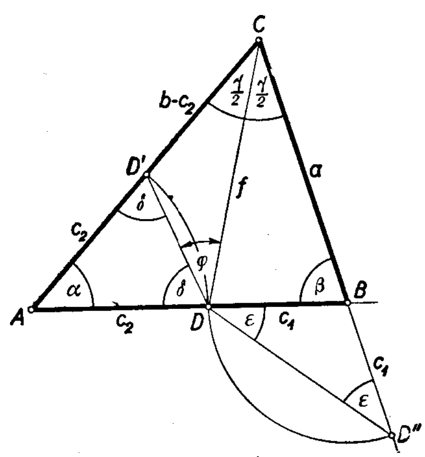
A 120°-os szög miatt $ABF_\triangle$ egyenlő oldalú, tehát $AF = c$. Másrészt $a : b = c_1 : c_2 = 2 : 1$ miatt $c_2 = \dfrac{c}{3}$. Továbbá a szögek egyenlősége miatt $ADF_\triangle \sim CDB_\triangle$, és így $AF : AD = BC : CD$, vagyis $c : \dfrac{c}{3} = a : f$, és így $f = \dfrac{a}{3} = 6$ cm.

Kristóf László (Mosonmagyaróvár, Kossuth g. III. o. t.)

IV. megoldás: A szögfelező-tétel szerint $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c_1}{c_2}$, tehát $bc_1 - ac_2 = 0$. Ennek felhasználásával bizonyítandó állításunk így is írható:

$$f = ab + bc_1 - ac_2 - c_1c_2 = (a + c_1)(b - c_2).$$

Forgassuk A körül a c_2-t az $AC = b$ oldalra, c_1-et pedig B körül a $BC = a$ oldal meghosszabbítására (4. ábra).



4. ábra

Az $ADD'_\triangle$ egyenlő szárú, tehát az alap mellett fekvő δ szögre

$$\delta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

δ külső szöge $CDD'_\triangle$-nek, tehát

$$\delta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} + \varphi,$$

amiből

$$\varphi = 90^\circ - \frac{a}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

A DBD'' egyenlő szárú háromszög külső szöge β, s így az alapjánál fekvő ε szögre

$$\varepsilon = 90^\circ - \frac{a}{2} - \frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

(1) és (2)-ből következik, hogy $\varphi = \varepsilon$, s így $CDD'_\triangle \sim CD''D_\triangle$. E háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő, vagyis

$$(b - c_2) : f = f : (a + c_1),$$

innen

$$f^2 = (a + c_1)(b - c_2),$$

ami állításunkkal azonos.

A numerikus számítás elvégzésére húzzunk a 3. ábrában D-n át AC-vel párhuzamost, amely messe a BC oldalt E-ben. A $CDE_\triangle$ minden szöge 60°, tehát $DE = EC = f$. Az ABC és DBE háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$AC : DE = BC : BE, \quad \text{azaz} \quad 9 : f = 18 : (18 - f), \qquad \text{amiből} \qquad f = 6.$$

Gergely Ervin (Bp. IV., Könyves Kálmán g. III. o. t.)