**I. megoldás:** Fel kell tennünk, hogy $b \neq 1$ és ki kell zárnunk az $y = 1$ értéket, mert különben egyenletrendszerünknek nem volna értelme; továbbá feltehetjük, hogy $a \neq 1$, mert különben $x = 1$ és $y$ tetszőleges. Ekkor $x \neq 1$.

Osszuk el a (2) egyenletet (1)-gyel:

$$\frac{(x^3-1)(y-1)}{(y^3-1)(x-1)} = \frac{(a^3-1)(b-1)}{(b^3-1)(a-1)}.$$

Ebből

$$\frac{x^2+x+1}{y^2+y+1} = \frac{a^2+a+1}{b^2+b+1},$$

vagyis

$$(b^2+b+1)(x^2+x+1) = (a^2+a+1)(y^2+y+1). \tag{3}$$

(1)-ből

$$x = \frac{a-1}{b-1}(y-1)+1, \tag{4}$$

és így

$$x^2+x+1 = x(x+1)+1 = \frac{(a-1)^2}{(b-1)^2}(y^2-2y+1) + \frac{3(a-1)}{b-1}(y-1)+3.$$

Ezen értéket (3)-ba helyettesítve, és mindkét oldalt $(b-1)^2$-tel szorozva

$$(b^2+b+1)\left[(a-1)^2(y^2-2y-1)+3(a-1)(b-1)(y-1)+3(b-1)^2\right] =$$
$$= (b-1)^2(a^2+a+1)(y^2+y+1).$$

y hatványai szerint rendezve

$$(a^2b-ab^2+b-a)y^2 + (ab^3-a^2b^2+2ab-a^2-b^3+ab^2-b^2)y+$$
$$+(b-a)(b^2-a)b = 0,$$

vagyis

$$(b-a)(1-ab)y^2 + (b-a)\left[b(ab-1)+a-b^2\right]y + (b-a)(b^2-a)b = 0.$$

$a = b$ esetén egyenletünk azonosságá válik, és minden $x = y$ érték gyöke egyenletrendszerünknek.

$ab = 1$ esetén $b = \dfrac{1}{a}$, és így (1) jobb oldala $-a$, (2) jobb oldala $-a^3 = (-a)^3$, vagyis ez a feltevés ellentmondásra vezet.

Tehát feltehetjük, hogy $a - b \neq 0$, $1 - ab \neq 0$.

$(b-a)(1-ab)$-vel osztva nyerjük

$$y^2 - \left(b + \frac{b^2-a}{1-ab}\right)y + \frac{b(b^2-a)}{1-ab} = 0,$$

ahonnan

$$y_1 = b, \qquad y_2 = \frac{b^2-a}{1-ab},$$

és így (4)-ből

$$x_1 = a, \qquad x_2 = \frac{a^2-b}{1-ab}.$$

Az $x_1 = a$, $y_1 = b$ triviális megoldás egyébként közvetlenül látható.

*Megjegyzés:* Az $x_2$, $y_2$ gyökök mindegyikének – mint láttuk – különböznie kell 1-től, tehát $a^2 - b \neq 1 - ab$, vagyis $(a-1)(a+1+b) \neq 0$. Tehát $x_2 \neq 1$, ha $a + b + 1 \neq 0$. Ugyanez a feltétele annak, hogy $y_2 \neq 1$.

$x_2$, $y_2$ csak akkor különbözik a triviális megoldástól, ha $\dfrac{a^2-b}{1-ab} \neq a$, vagyis $(a-1)(ab+b+a) \neq 0$, azaz, ha $ab + b + a \neq 0$. Ugyanekkor $y_2 \neq b$.

*Zagg József* (Pécs, Bányaip. t. IV. o. t.)

**II. megoldás.** Közvetlenül látjuk az $x_1 = a$, $y_1 = b$ triviális megoldást. Éppen úgy, mint a I. megoldásban (2) és (1) osztásából nyerjük

$$\frac{x^2+x+1}{a^2+a+1} = \frac{y^2+y+1}{b^2+b+1}. \tag{3}$$

Legyen (1) alapján

$$\frac{x-1}{a-1}=\frac{y-1}{b-1}=z.$$

Innen

$$x=(a-1)z+1, \qquad y=(b-1)z+1.$$

Ezen értékeket (3)-ba helyettesítve

$$\frac{\left[(a-1)z+1\right]^2+(a-1)z+2}{a^2+a+1}=\frac{\left[(b-1)z+1\right]^2+(b-1)z+2}{b^2+b+1}.$$

A törtet eltávolítva, rendezve és $3(b-a)$-val egyszerűsítve

$$(1-ab)z^2+(ab-a-b-2)z+(a+b+1)=0. \tag{4}$$

Az $x_1=a$, $y_1=b$ triviális megoldás a $z=1$ értéket szolgáltatja, vagyis $z=1$ a (4) egyenletnek egyik gyöke. A $(z-1)$ gyöktényezővel osztva

$$(1-ab)z-(a+b+1)=0,$$

amiből

$$z=\frac{a+b+1}{1-ab}=\frac{x-1}{a-1}=\frac{y-1}{b-1}.$$

Ebből

$$x_2=\frac{a^2-b}{1-ab}, \qquad y_2=\frac{b^2-a}{1-ab}.$$

*Vigassy György* (Bp. I., Petőfi g. IV. o.t.)