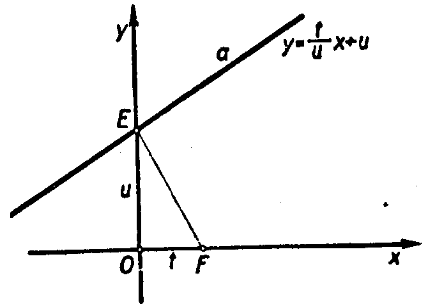
I. megoldás: Legyen a parabola egyenlete $y^2 = 4tx$, vagyis a fókusznak az origótól való távolsága $OF = t$. Messe a parabola érintője a csúcsérintőt, azaz az y tengelyt, egy E pontban és legyen $OE = u$ (1. ábra), akkor az EF egyenes iránytényezője $-\frac{u}{t}$, és így az EF-re merőleges érintő egyenlete

$$y = \frac{t}{u}x + u. \tag{1}$$



1. ábra

A másik két érintő által az y tengelyből lemetszett részeket v, ill. w-vel jelölve, e két érintő egyenlete

$$y = \frac{t}{v}x + v, \tag{2}$$

és

$$y = \frac{t}{w}x + w. \tag{3}$$

Az érintők alkotta háromszög egyik csúcsának koordinátáit megkapjuk, ha megoldjuk pl. az (1) és (2) egyenletrendszert. Elvégezve a számítást nyerjük, hogy

$$x = \frac{uv}{t}, \qquad y = u + v.$$

E csúcsból kiinduló magasság merőleges a (3) egyenesre; egyenlete tehát

$$y - (u + v) = -\frac{w}{t}\left(x - \frac{uv}{t}\right). \tag{4}$$

Hasonlóképpen az (1) egyenesre merőleges magasságvonal egyenlete

$$y - (v + w) = -\frac{u}{t}\left(x - \frac{vw}{t}\right). \tag{5}$$

(4) és (5)-ből a magasságpont koordinátái

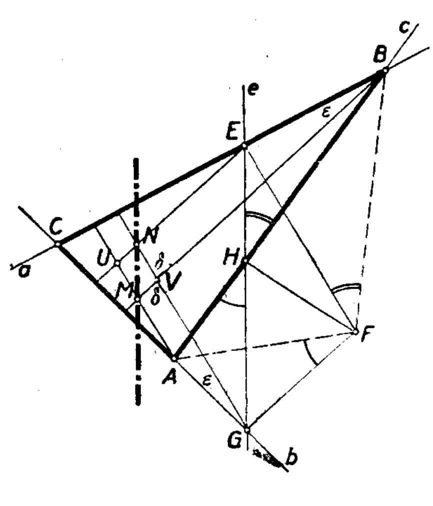
$$x = -t, \tag{6}$$

$$y = u + v + w + \frac{uvw}{t^2}. \tag{7}$$

(6) azt mutatja, hogy a magasságpontok a direktrikszen vannak, (7)-ből pedig következik, hogy minden megadott t és y esetén – tehát a direktriksz bármely pontjához – meg lehet választani az u, v és w értékeket úgy, hogy (7) teljesüljön. A keresett mértani hely tehát a direktriksz.

Almási Lajos (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)

II. megoldás: Jelöljük a parabola fókuszát F-fel, csúcsérintőjét e-vel, a három adott érintőt a-val, b-vel és c-vel. Az adott érintők messék a csúcsérintőt rendre az E, G és H pontban, egyébként a betűzést a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Először két tetszőleges adott érintőhöz, pl. a és b-hez vegyük hozzá harmadiknak a csúcsérintőt. Az így keletkező $ECG\triangle$ magassági pontja legyen N. A szerkesztés szerint $EFGN$ paralelogramma, tehát az N pont a direktrikszen van. Tekintsük azután az $ABC\triangle$-et. Az $ECG\triangle$ és $ABC\triangle$ két-két magasság-vonala szintén paralelogrammát határoz meg. Ha sikerülne kimutatni, hogy ez az $NVMU$ paralelogramma az $EFGN$ paralelogrammához hasonló, ebből máris következném – tekintve, hogy a paralelogrammák hasonló helyzetűek –, hogy az M pont is a direktrikszen van. Elég volna kimutatni, hogy

$$NV : MV = EF : GF. \tag{1}$$

Tekintsük a $VBEN$ és $VGAM$ trapézeket, melyekben az alapon fekvő szögek egyenlők (a V-nél fekvő δ szögek csúcsszögek, a B, ill. G-nél fekvő ε szögek merőleges szárú szögek). Ezért a nem párhuzamos oldalak aránya egyenlő, vagyis

$$NV : MV = EB : AG. \tag{2}$$

Másrészt

$$FEB\triangle \sim FGA\triangle.$$

Ugyanis az F-nél fekvő egyíves szög egyenlő a H-nál fekvő egyíves szöggel, mert $AGFH$ húrnégyszög. Hasonló okból a kétíves szögek is egyenlők, továbbá a H-nál fekvő egyíves és kétíves szög csúcsszögek. Ezenkívül $FEB\triangle$ és $FCA\triangle$ derékszögűek. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$EB : AG = EF : GF, \tag{3}$$

amivel – figyelemmel (2)-re – az (1) alatti állításunkat bebizonyítottuk.

Csiszár Imre (Bp. I., Petőfi g. III. o. t.)

III. megoldás: Ismeretes, hogy az érintőnek a csúcsérintővel alkotott metszéspontjában az érintőre állított merőleges átmegy a parabola fókuszán. Ennélfogva az ABC érintőháromszögnek az e csúcsérintő Simson-egyenese, vagyis F rajta van az a, b és c érintők alkotta $ABC\triangle$ köré írt körön.

Ugyancsak ismeretes, hogy valamely P ponthoz tartozó Simson-egyenes felezi a PM távolságot, ahol M a háromszög magassági pontja (ld. 659. feladatot, XI. kötet 3–4. sz. 1955. nov. 89–90. old.).

Mivel minden érintőháromszög köré írt kör átmegy az F fókuszon, és utóbbihoz tartozó Simson-féle egyenes mindenkor a csúcsérintő, azért az érintőháromszögek magasságpontjainak mértani helyét a csúcsérintőnek F-ből, mint hasonlósági középpontból kétszeres távolságra való kivetítése adja, ami viszont nem más, mint a parabola vezéregyenese.

Bánhidy Kálmán (Debrecen, Ref. g. III. o. t.)