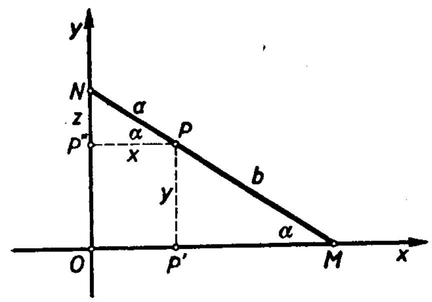
I. megoldás: Tekintsük a két egymásra merőleges egyenest egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyeinek. A P pont koordinátái $(x,\, y)$. A betűzést az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A $PP''N$ és $PP'M$ derékszögű háromszögekből

$$(1)\quad \frac{x}{a}=\cos\alpha, \qquad\qquad (2)\quad \frac{y}{b}=\sin\alpha.$$

(1) és (2)-t négyzetre emelve és összeadva kapjuk a mértani hely egyenletét:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Ez ellipszis egyenlete, melynek középpontja az origó, tengelyei pedig egybeesnek a koordináta-rendszer tengelyeivel. Ha $a>b$, akkor a fókuszok az x tengelyen, ellenkező esetben (1. ábra) a fókuszok az y tengelyen vannak.

Ha $a=b$, akkor az ellipszis az $x^2+y^2=a^2$ egyenletű körré fajul. Ha $P\equiv M$ vagy $P\equiv N$, akkor a mértani helyünk az x, ill. y tengelyen fekvő, O felezőponttal bíró, $2MN$ hosszúságú szakasz.

Fried László (Bp. VIII., Széchenyi közg. t. III. o. t.)

II. megoldás: A betűzést az 1. ábra mutatja.

$$PP'M\triangle\sim NP''P\triangle,$$

mert megfelelő oldalaik párhuzamosak.

Tehát

$$\frac{y}{b}=\frac{z}{a}, \qquad \text{ahol} \qquad z=\sqrt{a^2-x^2}.$$

z ezen értékét behelyettesítve

$$\frac{y}{b}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

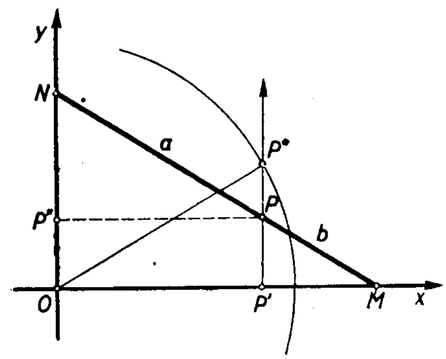
Ebből négyzetre emelés és rendezés után nyerjük az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

egyenletet.

Kocsis János (Eger, Dobó István g. IV. o. t.)

III. megoldás: Húzzunk az O körül egy $NP=a$ sugarú kört (2. ábra).



2. ábra

Messe a PP' egyenes a kört P^*-ban.

$$NP''P\triangle \simeq P^*P'O\triangle, \tag{3}$$

mert $NP = OP^*$, $P''P = P'O$, és mindkét háromszög derékszögű.

Figyelembe véve, hogy

$$NP''P\triangle \sim PP'M\triangle, \tag{4}$$

(3) és (4) alapján

$$P^*P'O\triangle \sim PP'M\triangle,$$

és így

$$P'P^* : P'P = OP^* : MP = a : b.$$

Tehát P minden helyzetében hozzárendelhetjük az a sugarú körnek P^* pontját és a megfelelő P és P^* pontokra nézve a $\frac{P^*P'}{PP'}$ arány állandó és értéke $\frac{a}{b}$. Ez azt fejezi ki, hogy a keresett mértani hely az a sugarú körnek affin rokona, tehát ellipszis, amelynek fél nagytengelye a, és az affinitás (PP^*) irányába eső fél kistengelye b.

Soós Tibor (Bp. I., Petőfi g. II. o. t.)