Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a kúpszelet tengelyei egybeesnek a $\Sigma(90^\circ)$ rendszer tengelyeivel, amelyeket egyszersmind derékszögű koordináta-rendszer tengelyeinek tekintünk.

Ez esetben az ellipszis és hiperbola közös egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{1}$$

ahol a jelenti az ellipszis fél nagytengelyét, ill. a hiperbola fél főtengelyét, c pedig a lineáris excentricitást.

A keresett mértani hely pontjainak koordinátáit az érintők által a tengelyekből lemetszett részek adják.

Az $(x_1,\,y_1)$ pontban érintő egyenes egyenlete

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{a^2-c^2}=1,$$

amiből

$$y=0 \quad \text{esetén} \quad x=\frac{a^2}{x_1}, \tag{2}$$

$$x=0 \quad \text{esetén} \quad y=\frac{a^2-c^2}{y_1}. \tag{3}$$

(2) és (3)-ból

$$x_1=\frac{a^2}{x},\qquad y_1=\frac{a^2-c^2}{y}.$$

Az $(x_1,\,y_1)$ pont rajta van az adott kúpszeleten, tehát x_1 és y_1 kielégítik az (1) alatti egyenletet, vagyis

$$\frac{\frac{a^4}{x^2}}{a^2}+\frac{\frac{(a^2-c^2)^2}{y^2}}{a^2-c^2}=\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^2-c^2}{y^2}=1$$

a keresett mértani hely egyenlete. Más alakban írva

$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=x^2y^2,$$

amiből nyilvánvaló, hogy a mértani hely negyedfokú görbe.

Két esetet kell megkülönböztetni: **a)** $a^2-c^2>0$ és **b)** $a^2-c^2<0$.

a) esetben $a^2-c^2=b^2$ és az (1) alatti egyenlet ellipszis-egyenlete, amelynek fél kistengelye b. A mértani hely egyenlete tehát

$$a^2y^2+b^2x^2=x^2y^2,$$

amiből

$$y=\pm\frac{bx}{\sqrt{x^2-a^2}},\qquad x=\pm\frac{ay}{\sqrt{y^2-b^2}}.$$

y valós, ha:	$x<-a$	és	$x>a$.
Értékkészlet:	$y<-b$	és	$y>b$.
Aszimptoták:	$x=\pm a$	és	$y=\pm b$.

Mindkét változónak csak páros kitevőjű hatványa szerepel, tehát görbénk mindkét tengelyre tükrös, és így az O pontra nézve centrálisan szimmetrikus. $a=b$ esetén az ellipszis körré fajul (ld. a 675. sz. feladatot). A négy egybevágó ágból álló görbe teljesen hasonlít a kör esetén nyert mértani helyhez (ld. az ábrát a múlt szám 139. oldalán), csak a síknegyedeket felező egyenesek ($y=x$, $y=-x$) már nem szimmetriatengelyek.

b) $a^2-c^2<0$ esetén hiperbolával van dolgunk, melynek fél melléktengelye $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

A mértani helynek egyenlete ez esetben

$$a^2y^2-b^2x^2=x^2y^2,$$

amiből

$$y=\pm\frac{bx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$
$$x=\pm\frac{ay}{\sqrt{b^2+y^2}}.$$

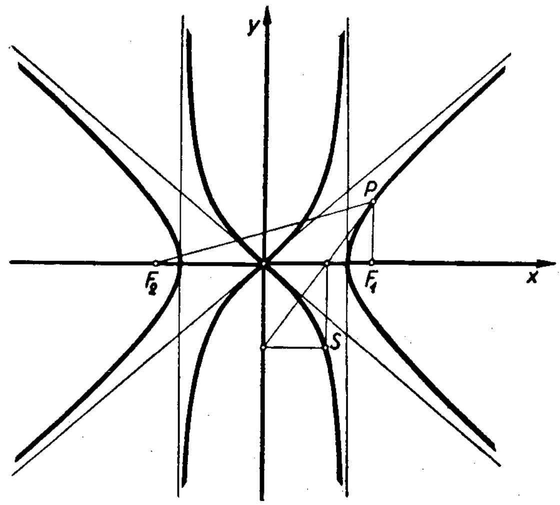
y valós, ha

$$-a<x<+a,$$

vagyis az értelmezési tartomány a $(-a,\,a)$ intervallum belső pontjai.

Értékkészlet: y minden értéket felvehet.

Aszimptoták: $x=\pm a$.



Éppen úgy, mint az **a)** esetben ez a görbe is 4 egybevágó ágból áll, melyek szimmetrikusak a két tengelyre, valamint az O pontra (ld. az ábrát).

Biczó Géza (Bp. II., Rákóczi g. IV. o. t.)