

A Hölder egyenlőtlenségben

$$1/s = 1 - 1/r = (r - 1)/r, \quad s = r/(r - 1).$$

Legyen  $k = 2$  és írjunk  $b_1 = c_1^{r-1}$ ,  $b_2 = c_2^{r-1}$ -et, ekkor

$$(a_1^r + a_2^r)^{1/r} (c_1^r + c_2^r)^{1-1/r} \geq a_1 c_1^{r-1} + a_2 c_2^{r-1}$$

alakban kapjuk az egyenlőtlenséget. (Egyenlőség áll, ha  $a_1/c_1 = a_2/c_2$ ). Írjunk itt  $c_1, c_2$  helyett  $x_1 + x_2$  és  $y_1 + y_2$ -t,  $a_1$  és  $a_2$  helyére előbb  $x_1, y_1$ -et, azután  $x_2, y_2$ -t és adjuk össze a két egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & \left[ (x_1^r + y_1^r)^{1/r} + (x_2^r + y_2^r)^{1/r} \right] [(x_1 + x_2)^r + (y_1 + y_2)^r]^{1-1/r} \geq \\ & \geq (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^{r-1} + (y_1 + y_2)(y_1 + y_2)^{r-1} = \\ & = (x_1 + x_2)^r + (y_1 + y_2)^r. \end{aligned}$$

A baloldal második tényezőjével, mely pozitív átosztva és osztva még  $2 \cdot 2^{1/r}$ -vel az

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x_1^r + y_1^r}{2} \right)^{1/r} + \left( \frac{x_2^r + y_2^r}{2} \right)^{1/r} \right] \geq \left[ \frac{\left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^r + \left( \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^r}{2} \right]^{1/r}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Egyenlőség áll, ha  $\frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{y_1}{y_1 + y_2}$  és  $\frac{x_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_2}{y_1 + y_2}$ , azaz, ha  $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ . Ez az

$\left( \frac{x^r + y^r}{2} \right)^{1/r}$  függvény tágabb értelemben konvex voltát fejezi ki. Ha eljárásunkat nem a kéttagú, hanem a  $k$  tagú Hölder-egyenlőtlenségre alkalmazzuk, akkor ugyanúgy az

$$\left( \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_k^r}{k} \right)^{1/r}$$

tágabb értelemben konvex voltát kifejező egyenlőtlenséghez jutunk.