Vizsgálatainkat átvihetjük többváltozós függvényekre is. Kétváltozós függvényt még tudunk ábrázolni a térben: a $z = F(x, y)$ függvény értékeit úgy ábrázolhatjuk, hogy a független változók egy x, y értékpárját egy síkbeli koordináta rendszerben ábrázoljuk és a függvényértékeket egy-egy ilyen pontban a síkra merőleges irányban ábrázoljuk. Minden számbajövő helyen ilyen módon ábrázolva a függvényt általában egy felület alakul ki a pontokból. Ez ismét lehet domború vagy homorú (alulról nézve). Ezekben az esetekben a függvényt is, aminek a felület a képe konvexnek, ill. konkávnak fogjuk nevezni. Pl. a konvexséget geometriailag a térben is azzal jellemezhetjük, hogy a felület két pontját összekötő húr mindig a felület fölött van. Mivel az $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, pontok közti szakaszt $q_2 : q_1$ arányban osztó pont koordinátái, ha még $q_1 + q_2 = 1$, $(q_1x_1 + q_2x_2,\ q_1y_1 + q_2y_2)$ és ebben a pontban a görbén a $z_1 = F(x_1, y_1)$, $z_2 = F(x_2, y_2)$ ordináták közti húr ordinátája $q_1z_1 + q_2z_2$, így az említett geometriai tulajdonságot az

$$F(q_1x_1 + q_2x_2,\ q_1y_1 + q_2y_2) < q_1F(x_1, y_1) + q_2F(x_2, y_2)$$

Jensen-egyenlőtlenség írja le. Több változó esetén már geometriailag nem tudjuk a függvényt szemléletesen ábrázolni, a konvexség fogalmát azonban ebben az esetben is értelmezhetjük éppen a fenti egyenlőtlenség megfelelőjével. Egy $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt konvexnek nevezzük, ha bármely két $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pontra és q_1, q_2 pozitív súlyokra, melyekre $q_1 + q_2 = 1$ fennáll az

$$\begin{gathered} F(q_1x_1 + q_2y_1, q_1x_2 + q_2y_2, \ldots, q_1x_n + q_2y_n) < \\ < q_1F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + q_2F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

egyenlőtlenség. Speciálisan, ha $q_1 = q_2 = \dfrac{1}{2}$, akkor kapjuk az

$$\begin{gathered} F\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \ldots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) < \\ < \frac{F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{2} \end{gathered}$$

szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget. Ismét igaz, hogy ennek a teljesüléséből következik a két és az akárhány tagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenség teljesülése is, legalábbis racionális súlyok esetén. A bizonyítást kétváltozós függvényre mondjuk el. Több változóra szószerint ugyanígy történhetik, csak írni kell többet. Feltesszük tehát, hogy egy $F\ (x, y)$ függvényre teljesül az

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2)}{2}$$

egyenlőtlenség. A Cauchy-féle gondolatmenetet követve először is megmutatjuk, hogy teljesül a hasonló, de 2^k tagú szimmetrikus egyenlőtlenség. $k = 1$-re az állítás csak a feltételi egyenlőtlenséget jelenti. Tegyük fel, hogy valamilyen j-re már tetszés szerinti nem csupa egyenlő (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_{2^j}, y_{2^j}) pontpárok esetén bebizonyítottuk az

$$\begin{gathered} F\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^j}}{2^j}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{2^j}}{2^j}\right) < \\ < \frac{F(x_1, y_1) + F(x_2, y_2) + \ldots + F(x_{2^j}, y_{2^j})}{2^j} \end{gathered}$$

egyenlőtlenséget. Legyen most adva 2^{j+1} számú pont:

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_{2^j}, y_{2^j}), (x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) \ldots (x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}}).$$

Ekkor

$$\begin{gathered} F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^j+1} + x_{2^j+1} + \ldots + x_{2^{j+1}}}{2^{j+1}}, \frac{y_1 + \ldots + y_{2^j} + y_{2^j+1} + \ldots + y_2^{j+1})}{2^{j+1}}\right) = \\ = F\left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_{2^j}}{2^j} + \dfrac{x_{2^j+1} + \ldots + x_{2^{j+1}}}{2^j}}{2}, \frac{\dfrac{y_1 + \ldots + y_{2^j}}{2^j} + \dfrac{y_{2^j+1} + \ldots + y_{2^{j+1}}}{2^j}}{2}\right) \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left\{F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^j}}{2^i}, \frac{y_1 + \ldots + y_{2^j}}{2^j}\right) + F\left(\frac{x_{2^j+1} + \ldots + x_{2^{j+1}}}{2^j}, \frac{y_{2^j+1} + \ldots + y_{2^{j+1}}}{2^j}\right)\right\} \leq \\ \leq \frac{\dfrac{F(x_1, y_1) + \ldots + F(x_{2^j}, y_{2^j})}{2^j} + \dfrac{F(x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) + \ldots + F(x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}})}{2^j}}{2} = \\ = \frac{F(x_1, y_1) + \ldots + F(x_{1^j}, y_{2^j}) + F(x_{2^j+1}, y_{2^j+1}) + \ldots + F(x_{2^{j+1}}, y_{2^{j+1}})}{2^{j+1}}. \end{gathered}$$

Ha a pontok nem mind esnek egybe, akkor nem állhat fenn mindenütt az egyenlőség jele s így teljes indukcióval bizonyítottuk állításunkat.

Ha most van tetszés szerinti számú pontunk: $(x_1,\, y_1)$, …, $(x_k,\, y_k)$, akkor válasszuk j-t úgy hogy $2^{j-1} < k < 2^j$, ($k = 2^j$-re már bizonyítottuk a szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülését) és legyen

$$x = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \quad y = \frac{y_1 + \ldots + y_k}{k}.$$

Ekkor

$$F(x,y) = F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \ldots + y_k}{k}\right) =$$
$$= F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k + (2^j - k)x}{2^j}, \frac{y_1 + \ldots + y_k + (2^j - k)y}{2^j}\right) <$$
$$< \frac{F(x_1,y_1) + \ldots + F(x_k,y_k) + (2^j - k)F\,(x,y)}{2^j}$$

az éppen bizonyított állítás szerint, ez pedig átrendezve a

$$kF(x,y) < F(x_1,y_1) + \ldots + F(x_k,y_k)$$

egyenlőtlenséget adja, vagy x és y jelentését beírva és k-val osztva

$$F\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, \frac{y_1 + \ldots + y_k}{k}\right) < \frac{F(x_1,y_1) + \ldots + F(x_k,y_k)}{k},$$

vagyis teljesül a k tagú szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenség is.

A *racionális* súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget mindig átírhatjuk szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséggé, melyben az egyes alappontok többször ismétlődnek. Így ezen egyenlőtlenség teljesülése is következik levezetésünkből.

Ahhoz, hogy a tetszőleges valós súlyokkal súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is szigorúan bebizonyíthassuk, fel kellene tenni a függvényről, hogy nem változhat hirtelen túl nagyot a függvényérték, ha az egyes változók csak nagyon kevéssel változnak. Természetesen először is ezt a nagyon hozzávetőlegesen fogalmazott tulajdonságot – amit a függvény folytonosságának nevezünk – matematikai szigorúsággal kellene megfogalmazni, azután szigorúan be kellene bizonyítani ez esetben is a Jensen-egyenlőtlenség teljesülését. Ezzel lenne teljes annak a bizonyítása, hogy a kéttagú szimmetrikus egyenlőtlenség teljesülése is elegendő ahhoz, hogy a függvény konvexségére következtethessünk. Bár ennek a részleteibe nem fogunk most belemenni, a tételt mégis fel fogjuk használni.

Nyilvánvalóan ugyanezen az úton bizonyíthatjuk azt is, hogy egy $G\,(x_1, \ldots, x_n)$ többváltozós függvény akkor és csakis akkor konkáv, ha bármely két $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ „pontra”.

$$G\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \ldots, \frac{x_n + y_n}{2}\right) > \frac{G\,(x_1, \ldots, y_n) + G\,(y_1, \ldots, y_n)}{2}.$$

Hasonló egyenlőtlenségekkel jellemezhetők a tágabb értelemben konvex és tágabb értelemben konkáv függvények is.