

A (d) egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával nyerjük a következőt: Legyen  $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_k$ ,  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$ , de legalább az egyik sorozat ne álljon csupa egyenlő elemből, végül vezessük be a következő jelöléseket:

$$D_1 = \frac{f(v_1) - f(u_1)}{v_1 - u_1}, \quad D_2 = \frac{f(v_2) - f(u_2)}{v_2 - u_2}, \quad \dots, \quad D_k = \frac{f(v_k) - f(u_k)}{v_k - u_k}.$$

Ekkor kapjuk, ha  $f(x)$  konvex függvény, hogy

$$D_1 \geq D_2, \quad D_2 \geq D_3, \quad \dots, \quad D_{k-1} \geq D_k,$$

azaz  $D_1 - D_2 \geq 0$ ,  $D_2 - D_3 \geq 0$ ,  $\dots$ ,  $D_{k-1} - D_k \geq 0$ .

Feltevésünk szerint nem állhat mindenütt az egyenlőség jele.

$$\begin{array}{l} \text{Legyen} \quad U_1 = u_1, \quad U_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad U_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k, \\ \text{és} \quad \quad V_1 = v_1, \quad V_2 = v_1 + v_2, \quad \dots, \quad V_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k. \end{array}$$

Ha most  $U_1 < V_1$ ,  $U_2 < V_2$ ,  $\dots$ ,  $U_{k-1} < V_{k-1}$ , de  $U_k = V_k$ , akkor ezeket rendre szorozva a fenti pozitív mennyiségekkel és összeadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} U_1(D_1 - D_2) + U_2(D_2 - D_3) + \dots + U_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + U_k D_k < \\ < V_1(D_1 - D_2) + V_2(D_2 - D_3) + \dots + V_{k-1}(D_{k-1} - D_k) + V_k D_k, \end{aligned}$$

és a  $D$ -k szerint átrendezve (miután  $U_2 - U_1 = u_2$ ,  $U_3 - U_2 = u_3$ ,  $\dots$ ,  $U_k - U_{k-1} = u_k$  és hasonló érvényes a  $V$ -kre) kapjuk, hogy

$$u_1 D_1 + u_2 D_2 + \dots + u_k D_k < v_1 D_1 + v_2 D_2 + \dots + v_k D_k,$$

ha az  $f(x)$  függvény konvex.