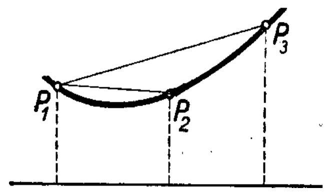
A IV. közleményben említettünk a konvexségre jellemző néhány újabb geometriai tulajdonságot. Így egy $f(x)$ függvény görbéje konvex, egy szakaszon, ha e szakasz bármely három növekvő abszcisszák szerint következő P_1, P_2, P_3 pontjára fennáll, a következő tulajdonságok bármelyike:

a) hogy a P_1P_2 húr a P_1P_3 húr alatt van,
b) hogy a P_2P_3 húr a P_1P_3 húr alatt van,
c) hogy a P_1P_2 húr meghosszabbítása a P_2P_3 húr alá fut.



Fejezzük ki e tulajdonságokat az algebra nyelvén. Ha két egyenesnek egy pontja közös, akkor egy nagyobb abszcissza-értéknél az van magasabban, egy kisebb abszcissza-értéknél pedig az van mélyebben, amelyiknek a meredeksége nagyobb. Az $f(x)$ görbe ξ és ξ' abszcisszájú pontok közti húrjának a meredeksége pedig

$$\frac{f(\xi') - f(\xi)}{\xi' - \xi}.$$

Így ha a három pont abszcisszái x_1, x_2, x_3, akkor a fenti tulajdonságokat rendre az

$$\text{(a)} \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

egyenlőtlenségek fejezik ki. Mindegyik egyenlőséget átszorozhatjuk a nevezők szorzatával, mert feltétel szerint $x_1 < x_2 < x_3$ és így mindegyik nevező pozitív. Ha még a kapott egyenlőtlenséget nullára redukáljuk és $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$-at röviden y_1, y_2, y_3-mal jelöljük, akkor mindhárom egyenlőtlenségből az

$$\text{(t)} \qquad x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk és ez vissza is alakítható a három egyenlőtlenség bármelyikévé. A (t) egyenlőtlenség baloldalán álló kifejezés a $P_1P_2P_3$ háromszög kétszeres területének kifejezése koordináták segítségével. Így a kapott egyenlőtlenség szerint a három pont nem sorakozhat egy egyenesen, sőt azt is tudjuk, hogy ha a területet pozitív előjellel adja a képlet, akkor a P_1, P_2, P_3 csúcsok az óra járásával ellenkező körüljárás sorrendjében következnek. Ez a geometriai tulajdonság tekinthető a konvexség újabb geometriai jellemzésének is, amiből könnyen következnek az (a), (b) és (c) tulajdonságok. Könnyű látni, hogy ez a geometriai tulajdonság tartalmazza a kéttagú súlyozott Jensen-egyenlőtlenséget is, amit eredetileg a konvexség jellemzésére használtunk. Utóbbit úgy kaptuk, hogy az algebra nyelvére fordítottuk a következő tulajdonságot: a P_2 pont a P_1P_3 húr alatt van. Mivel x_2 az (x_1, x_3) szakaszt $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_2)$ arányban osztja, így a P_1P_3 húr x_2 abszcisszájú pontja ugyanilyen arányban osztja a húrt, tehát ordinátája

$$\frac{(x_3 - x_2)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_3)}{x_3 - x_1}$$

s így a mondott tulajdonságot az

$$\text{(j)} \qquad f(x_2) < \frac{(x_3 - x_2)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_3)}{x_3 - x_1}$$

egyenlőtlenség fejezi ki.

Ha itt egyrészt $\dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = q_1$, $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = q_2$-t írunk, tehát $q_1 + q_2 = 1$ és x_2 helyébe a vele azonos $q_1x_1 + q_2x_3$ értéket, (ami azt fejezi ki, hogy x_2 az (x_1, x_3) szakaszt $q_2 : q_1 = (x_2 - x_1) : (x_3 - x_2)$ arányban osztja), akkor megkapjuk a Jensen-egyenlőtlenséget. Másrészt viszont a (j) egyenlőtlenség is átalakítható a (t) egyenlőtlenséggé, csupa olyan lépésekben, melyek ellenkező irányban is elvégezhetők, vagyis a (t) egyenlőtlenség átalakítható a Jensen-egyenlőtlenséggé is és viszont. Ebből az is következik, hogy az (a), (b), (c) egyenlőtlenségek mindegyike (és a (t) is) következik a Jensen-egyenlőtlenségből és megfordítva utóbbi is ezek bármelyikéből.