

Láttuk, hogy a hatványközepek, ha a kitevőt nagyon kicsinek választjuk, tetszés szerint közel jutnak a mértani középhez. Kérdés most, mit tudunk mondani a hatványközepekről, ha a kitevő „nagyon nagy” lesz és ha „nagyon nagy” negatív értékeket vesz fel. Legyenek  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , az adott nem negatív számok. Rendezzük őket mindjárt nagyság szerint, tehát legyenek pl.  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  és ne legyenek az összes  $a$ -k egyenlők. Képezzük a  $q_1, q_2, \dots, q_k$  (pozitív) súlyokkal súlyozott  $r$ -edik hatványközepeket, tehát ha  $q_1 + q_2 + \dots + q_k = 1$ , a

$$H_r = (q_1 a_1^r + q_2 a_2^r + \dots + q_k a_k^r)^{1/r}$$

kifejezést.

Ez sem túl nagy, sem túl kicsi nem lehet. Legyen először  $r$  pozitív. Csökkentsük egyrészt a kifejezést úgy, hogy csak az utolsó tagot tartjuk meg belőle, másrészt növeljük a kifejezést, ha mindegyik  $a$  helyett a legnagyobbat írjuk. Így kapjuk, hogy

$$q_k^{1/r} a_k \leq H_r \leq [(q_1 + q_2 + \dots + q_k) a_k^r]^{1/r} = a_k.$$

Ha viszont a kitevő  $-r$  negatív szám, (tehát a fenti kifejezés tulajdonképpen nevezőben áll és ott is az  $a$ -k hatványainak reciprokai állnak), akkor nagyobbítjuk a kifejezés értékét, ha tagokat elhagyunk, pl. csak az elsőt tartjuk meg, viszont kisebbítjük, ha az egyes tagokat nagyobbítjuk pl. minden  $a$ -nak a  $-r$ -edik hatványa helyébe  $a_1^r$ -t írunk. Így azt kapjuk, hogy

$$(1/q_1)^{1/r} a_1 = (q_1 a_1^{-r})^{-1/r} > H_r \geq [(q_1 + q_2 + \dots + q_k) a_1^{-r}]^{-1/r} = a_1.$$