Egyenletünk így is írható

$$4x^2 + x + 4p = 0$$

a) Ismeretes, hogy az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökeinek elemi szimmetrikus formái $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ és $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{ac}.$$

Jelen esetben $a = 4$, $b = 1$ és $c = 4p$, tehát

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x^2}{x_1} = \frac{1 - 32p}{16p} = -\frac{9}{4},$$

amiből

$$p = -\frac{1}{4}.$$

b) Feladatunk értelmében a gyökök x_1, és $x_1^2 - 1$.
Tehát

$$x_1 + (x_1^2 - 1) = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}, \tag{1}$$

és

$$x_1(x_1^2 - 1) = \frac{c}{a} = p. \tag{2}$$

(1) x_1-re nézve másodfokú egyenlet, amiből x_1 kiszámítható. Az egyszerűség kedvéért jelöljük x_1-et y-nal, akkor

$$y^2 + y - 1 = -\frac{1}{4},$$

azaz

$$4y^2 + 4y - 3 = 0,$$

ahonnan

$$y_1 = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

$y = x_1$ ezen értékeit (2)-be helyettesítve

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8},$$
$$p_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{5}{4} = -\frac{15}{8}.$$

Bártfai Pál (Bp., I., Petőfi g. II. o. t.)