Távolítsuk el a szokásos módon a gyökjeleket. Vigyük át a baloldal második tagját a jobboldalra, akkor négyzetre emelés, rendezés és 2-vel való egyszerűsítés után

$$2\sqrt{x-4}-4=\sqrt{4x-16\sqrt{x-4}}$$

Még egyszer négyzetre emelve és rendezve kapjuk, hogy

$$0=0.$$

Eszerint tehát azonossággal volna dolgunk, de mégsem mondhatjuk, hogy x minden értéke kielégíti egyenletünket, mert a kétszeri négyzetre emelés folytán kerülhetett be hamis gyök, sőt végtelen sok hamis gyök is. Meg kell tehát vizsgálni, hogy eredeti egyenletünket milyen x értékek elégítik ki.

Mindenekelőtt állapítsuk meg, hogy egyenletünk csak akkor van értelmezve, ha $x\geq 4$

Eredeti egyenletünk így is írható:

$$\sqrt{\left(2\sqrt{x-4}-3\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{x-4}-4\right)^2}=1,$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a baloldal, ha x-et 4-től indulva növeljük. Mivel a négyzetgyökön annak pozitív értékét szoktuk érteni, így az első négyzetgyök $3-2\sqrt{x-4}$-et jelent, amíg $2\sqrt{x-4}\leq 3$ azután pedig $2\sqrt{x-4}-3$-at. Mivel az előbbi egyenlőtlenség, mindkét oldalán pozitív szám áll, vagy 0, ha $x\geq 4$, így négyzetre emelhetünk és kapjuk, hogy

$$\sqrt{\left(2\sqrt{x-4}-3\right)^2}=\begin{cases}3-2\sqrt{x-4}, \text{ ha } 4\leq x\leq \dfrac{25}{4},\\[2ex] 2\sqrt{x-4}-3, \text{ ha } \qquad x\geq \dfrac{25}{4},\end{cases}$$

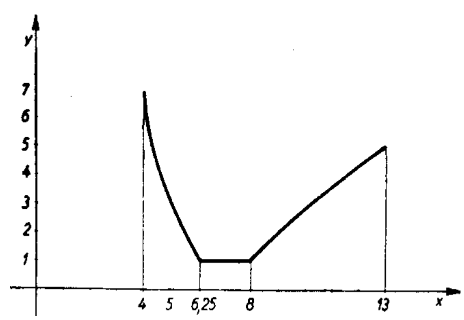
hasolóan

$$\sqrt{\left(2\sqrt{x-4}-4\right)^2}=\begin{cases}4-2\sqrt{x-4}, \text{ ha } \ 4\leq x\leq 8,\\[1ex] 2\sqrt{x-4}-3, \text{ ha } \ x\geq 8,\end{cases}$$

Így

$$\sqrt{\left(2\sqrt{x-4}-3\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{x-4}-4\right)^2}=\begin{cases}7-4\sqrt{x-4}, & \text{ha } \ 4\leq x\leq \dfrac{25}{4}\\[2ex] \quad 1, & \text{ha } \ \dfrac{25}{4}\leq x\leq 8\\[2ex] 4\sqrt{x-4}-7, & \text{ha } \ 8\leq x\end{cases}$$

A függvény menetét az ábrán látható görbe szemlélteti.



Látjuk tehát, hogy az (1) egyenlet minden olyan x-re teljesül, amely $\dfrac{25}{4}=6{,}25$ és 8 közé esik (a határpontokat is beleértve) tehát végtelen sok x értékre, azonban távolról sem minden x értékre. Az ezektől különböző x értékék nem elégítik ki eredeti egyenletünket, hanem csak a kétszeri négyzetre emelés után nyert egyenlőségnek tesznek eleget.

Megjegyzés: Ha a megoldás folyamán helytelenül különböző intervallumokban érvényes kifejezéseket kapcsolunk össze, akkor kapjuk »gyök« gyanánt az $x=\dfrac{25}{4}$ ill. $x=8$ értékeket, mint a két-két szomszédos intervallumnak közös határpontját.