A bebizonyítandó állítás

$$\varrho \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{6}$$

A feladat értelmében a beírt kör sugara és a háromszög oldalai között kell kapcsolatot keresnünk. A kérdéses sugár a háromszög területével fejezhető ki egyszerűen (s a fél kerület jele)

$$\varrho = \frac{t}{s},$$

a területet pedig Heron képlete fejezi ki az oldalakkal

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A behelyettesítések után állításunk ilyen alakot ölt

$$\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(b-c)}}{s} \leq \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{6}.$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre és rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$36(s-a)(s-b)(s-c) \leq s(a^2+b^2+c^2). \tag{1}$$

Meg kellene becsülnünk az $(s-a)(s-b)(s-c)$ szorzatot. Két számról tudjuk, hogy azok mértani középarányosa kisebb, vagy egyenlő, mint számtani közepük. $\left(\sqrt{pq} \leq \frac{p+q}{2}\right)$. Három pozitív p, q, r számra hasonló szerkezetű összefüggés áll fenn: [1]

$$\sqrt[3]{p \cdot q \cdot r} \leq \frac{p+q+r}{3} \text{ illetőleg } pqr \leq \frac{(p+q+r)^3}{27}.$$

E tétel szerint

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{(s-a+s-b+s-c)^3}{27},$$

ahol a jobboldali számláló értéke éppen s^3. Eszerint (1) helyett elég bebizonyítani, hogy

$$\frac{36s^3}{27} \leq s(a^2+b^2+c^2).$$

s-sel végigosztva és a törtet egyszerűsítve

$$\frac{4s^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2, \text{ azaz } (2s)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2),$$

ami s értékének visszahelyettesítése és az oldalak felcserélése után így írható:

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

A jobboldalt tagokra bontva és rendezve a

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, amit végül a következő alakúra hozhatunk

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Ennek helyessége nyilvánvaló. Legutolsó állításunk, éppen így minden közbeeső is magában foglalja a megelőző érvényességét, az (1) helyességéből is következik az előző nyilvánvalóan pozitív négyzetgyökökre vonatkozó állítás, tehát tételünket bebizonyítottuk.

Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a=b=c$.

Más becslés felhasználásával oldotta meg: Dávid P.

---

[1] $\frac{p+q+r}{3} = n$ jelöléssel $p = n+u_1$, $q = n+u_2$, $r = n+u_3$, ahol $u_1+u_2+u_3 = 0$, tehát ha nem mindhárom u nulla, akkor van köztük pozitív is, negatív is. Feltehetjük, hogy $u_1 < 0 < u_2$. Ekkor $pqr = (n+u_1)(n+u_2)(n+u_3) = \left(n^2+(u_1+u_2)n+u_1u_2\right)(n+u_3) < (n^2-u_3n)(n+u_3) = n(n^2-u_3^2) < n^3$. (Elhagytuk a negatív u_1u_2 majd $-u_3^2$ tagot.)