I. megoldás: Az a célunk, hogy ezt az egyenletrendszert helyettesítsük egy olyan egyenletrendszerrel, amelynek gyökeit már ismert összefüggések alapján meg tudjuk határozni.

Az első egyenletet négyzetre emeljük, majd levonjuk az így kapott egyenletből a másodikat, ekkor

$$xy + yz + zy = 0$$

egyenlethez jutunk.

Felhasználva az előbbi feladatban szereplő azonosságokat

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1 \cdot (1 - 0) = 1, \text{ de } x^3 + y^3 + z^3 = \frac{89}{125}$$

tehát

$$3xyz = \frac{89}{125} - 1 = -\frac{36}{125}$$

ebből

$$xyz = -\frac{12}{125}$$

Tehát az eredeti egyenletrendszer helyett tekinthetjük az

I.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ xy + yz + zx &= 0 \\ xyz &= -\frac{12}{125} \end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Ha x, y, z-t tekintjük úgy is, hogy egy harmadfokú egyenletnek gyökei, mégpedig a

$(t - x)(t - y)(t - z) = 0$ (gyöktényezős előállítás).

Ennek a harmadfokú egyenletnek együtthatói

t^3 együtthatója $= 1$

t^2 együtthatója $= (x + y + z) = 1$

t együtthatója $= xy + yz + zx = 0$

az állandó tag

$$-xyz = \frac{12}{125}.$$

Vagyis az egyenlet

$$t^3 - t^2 + \frac{12}{125} = 0.$$

Ezt a harmadfokú egyenletet azonban könnyen meg tudjuk oldani

$$t^3 = t^2 - \frac{12}{125}$$

$\frac{8}{125}$ -öt levonva mindkét oldalból: $t^3 - \frac{8}{125} = t^2 - \frac{20}{125} = t^2 - \frac{4}{25}$.

A jobboldalt szorzattá alakítva $t^2 - \frac{4}{25} = \left(t + \frac{2}{5}\right)\left(t - \frac{2}{5}\right)$.

A baloldalt $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosság szerint felbontva

$$\left(t - \frac{2}{5}\right)\left(t^2 + \frac{2}{5}t + \frac{4}{25}\right) = \left(t + \frac{2}{5}\right)\left(t - \frac{2}{5}\right)$$

ebből $t_1 = \frac{2}{5}$, ezen gyök figyelembevétele után $t - \frac{2}{5}$-del osztva

$$t^2 - \frac{3}{5}t - \frac{6}{25} = 0,$$

innen

$$t = \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{24}{25}}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{10}$$

És így az egyenletrendszer megoldásai:

$$x = \frac{2}{5}, \qquad y = \frac{3 + \sqrt{33}}{10}, \qquad z = \frac{3 - \sqrt{33}}{10}.$$

Nyilvánvaló az egyenlet szimmetrikus felépítéséből, hogy ezen 3 érték bármelyikét tekinthetjük x-nek, vagy y-nak, vagy z-nek. Vagyis ennek az egyenletrendszernek három tizedes pontosságig számolva az

$$(x,\ y,\ z) \approx (0{,}4;\ 0{,}875;\ -0{,}275)$$

értékek a megoldásai tetszésszerinti sorrendben.

Megoldotta: ifj. Csonka P., Dávid P., Seitz K.

II. megoldás: Emeljük négyzetre az első egyenletet és vegyük tekintetbe a másodikat is. Akkor abból, hogy:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx),$$

következik, hogy

$$xy+yz+zx=0.$$

A 264*. feladat eredményének:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

és egyenleteinknek összehasonlítása adja xyz értékét:

$$xyz=-\frac{12}{125}\,.$$

x, y és z tehát gyökei a következő egyenletnek:

$$u^3-u^2+\frac{12}{125}=0.$$

A harmadfokú egyenlet megoldása céljából az x^2-es tagot el akarjuk tüntetni. Ha új ismeretlennek behozzuk v-t:

$$u=v+\frac{1}{3},$$

akkor ennek helyettesítése után a v-re kapott egyenlet lesz:

$$v^3-\frac{1}{3}v+\frac{74}{27\cdot 125}=0.$$

Ebből most már a harmadfokú egyenletek megoldási eljárása szerint v értéke meghatározható. Most azonban egyszerűen célhoz juthatunk, ha még egyszer új ismeretlent vezetünk be:

$$v=\frac{2}{3}w.$$

Ekkor ugyanis az új egyenlet ilyen alakúra hozható:

$$4w^3-3w+\frac{37}{125}=0,$$

és ez emlékeztet a $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ összefüggésre, ami így is írható:

$$4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0.$$

w tehát nem más, mint $\sin\alpha$, hogyha

$$\sin 3\alpha = \frac{37}{125} = 0{,}2960.$$

Határozzuk meg tehát ebből 3α-t, azután a táblázatból kikereshetjük $\sin\alpha = w$ értékét is.

Visszakeresve a $\sin 3\alpha = 0{,}2960$ értéket, a táblázatban ezt a $17{,}22^\circ$-nál találjuk 3α azonban nemcsak ekkora lehet, hanem 360° többszörösével több is:

$$3\alpha = 17{,}22^\circ + k360^\circ.$$

Csak $k=0;\ 1;\ 2$ értékekre kapunk ebből különböző értéket, tehát

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 5{,}74^\circ,\\
\alpha_2 &= 5{,}74^\circ + 120^\circ = 125{,}74^\circ,\\
\alpha_3 &= 5{,}74^\circ + 240^\circ = 245{,}74^\circ.
\end{aligned}$$

A megfelelő sinus-értékek,

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sin 5{,}74^\circ &&= &&= 0{,}1\\
w_2 &= \sin 125{,}74^\circ &&= \sin 54{,}26^\circ &&= 0{,}8117,\\
w_3 &= \sin 245{,}74^\circ &&= -\sin 65{,}74^\circ &&= -0{,}9117.
\end{aligned}$$

w-ből az

$$v = \frac{2}{3}w \quad \text{és} \quad u = v + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}w + \frac{1}{3},$$

vagyis

$$u = \frac{1}{3}(2w+1).$$

Ennek folytán most már:

$$u_1 = 0{,}4, \qquad u_2 = 0{,}8745, \qquad u_3 = -0{,}2745.$$

Eredeti egyenletrendszerünkben ezeknek az értékeknek bármelyike választható x-nek, a másik y-nak és a harmadik z-nek.

Megoldotta képlettel, számolási hibákkal: Villányi O.