I. megoldás: Ha $n=2$, akkor az $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}\geq 2$ bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. A két oldal különbsége

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2=\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}\geq 0,$$

ha x_1 és x_2 pozitív. Egyenlőség csak akkor állhat, ha $x_1=x_2$.

Próbáljuk meg az általános állítást a tagok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítani. $n=2$-re már igazoltuk az állítást. Tegyük fel, hogy valamilyen $n==k$ értékre már bebizonyítottuk az állítást, tehát bármely k pozitív $x_1,\ \ldots,\ x_k$ számra

(1) $$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{x_k}+\frac{x_k}{x_1}\geq k.$$

Nézzünk egy $k+1$ számú pozitív számból: y_1, y_2, …, y_{k+1}-ből képzett

(2) $$\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_3}+\ldots+\frac{y_k}{y_{k+1}}+\frac{y_{k+1}}{y_1}$$

kifejezést. Ha van két szomszédos elem a számok sorozatában, amelyek egyenlők: $y_i=y_{i+1}$, akkor $\dfrac{y_{i-1}}{y_i}+\dfrac{y_i}{y_{i+1}}=\dfrac{y_{i-1}}{y_{i+1}}+1$.

(Szomszédosnak tekintjük y_{k+1}-et és y_1-et is. Ekkor $i=k+1$ és y_{i+1}-et y_1-gyel kell helyettesíteni; vagy $i=1$ és y_{i-1}-et kell y_{k+1}-gyel helyettesíteni.) Így a vizsgálandó kifejezés

(3) $$\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_3}+\ldots+\frac{y_{i-1}}{y_{i+1}}+1+\frac{y_{i+1}}{y_{i+2}}+\ldots+\frac{y_{k+1}}{y_1}$$

alakú, tehát egy 1-esből és egy k tagú kifejezésből áll, mely ugyanolyan típusú, mint az (1) egyenlőtlenség baloldala. Így erről tudjuk, hogy értéke legalább $1+k$. Ha nincs két szomszédos egyenlő tag a sorozatban, akkor is helyettesíthetjük valamilyen i-re $\dfrac{y_{i-1}}{y_i}$, $\dfrac{y_i}{y_{i+1}}$-et $\dfrac{y_{i-1}}{y_{i+1}}+1$-gyel és ismét egy (3) alakú kifejezést kapunk, amelyik értéke legalább $k+1$. Ebből csak akkor következtethetünk arra, hogy az eredeti kifejezés értéke is legalább $k+1$, ha tudjuk, hogy a végzett módosítással kisebbítettük az összeget, azaz hogy

$$\frac{y_{i-1}}{y_i}+\frac{y_i}{y_{i+1}}\geq\frac{y_{i-1}}{y_{i+1}}+1.$$

A két oldal különbsége közös nevezőre hozva

$$\frac{y_{i-1}y_{i+1}+y_i^2-y_{i-1}y_i-y_iy_{i+1}}{y_iy_{i+1}}=$$
$$=\frac{y_{i-1}(y_{i+1}-y_i)+y_i(y_i-y_{i+1})}{y_iy_{i+1}}=\frac{(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})}{y_iy_{i+1}}$$

Ez a kifejezés akkor pozitív, ha y_i vagy nagyobb y_{i+1}-nél is, y_{i-1}-nél is, vagy mind a kettőnél kisebb. Ilyen y_i biztosan van, például a számok legkisebbike, vagy legnagyobbika. Ezek közül egyet választva y_i-nek (ha $i=k+1$, akkor y_{i+1}-en y_1-et értjük, ha pedig $i=1$, akkor y_{i-1}-en y_{k+1}-et) a (2) kifejezés nagyobb lesz, mint a (3) alatti, ez pedig az indukciós feltevés szerint nem kisebb $k+1$-nél. Ha tehát az állítás igaz valamilyen k-ra, akkor igaz $k+1$-re is. Ezzel bizonyítottuk, hogy minden n-re igaz.

$n=2$-re láttuk, hogy egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a két szám egyenlő. A bizonyítás azt is mutatja, hogy az egyenlőtlenség abban a szigorúbb formában érvényes, hogy egyenlőség csak akkor állhat, ha az adott számok mind egyenlők. Tegyük fel ugyanis, hogy valamilyen k-ra ebben a szigorúbb formában bizonyítottuk az állítást. Ha y_i különbözik y_{i-1}-től is, y_{i+1}-től is, akkor a (2) kifejezés határozottan nagyobb (3)-nál, tehát $k+1$-nél is. Ha pl. $y_i=y_{i+1}$, akkor a (2) kifejezés egyenlő a (3)-mal, viszont az indukciós feltevés szerint a (3) kifejezés csak akkor egyenlő $k+1$-gyel, ha $y_1=\ldots=y_{i-1}=y_{i+1}=\ldots=y_{k+1}$. Mivel viszont $y_i=y_{i+1}$, tehát azt nyertük, hogy $k+1$ szám esetén is csak akkor állhat egyenlőség, ha minden szám egyenlő.

Ezzel bizonyítottuk ezt az erősebb állítást is.

II. megoldás: A megadott n szám szorzata

$$\frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\frac{x_3}{x_4}\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n}\frac{x_n}{x_1}=1$$

lévén a mértani közepük is 1.

Ismeretes azonban, hogy n szám számtani közepe nagyobb, vagy egyenlő mint mértani közepük. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a tagok egyenlők.

$$\frac{\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\ldots+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}+\dfrac{x_n}{x_1}}{n}\geq 1,$$

vagyis

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq n.$$

Egyenlőség csak akkor van, ha $\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\ldots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1$
vagyis

$$x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n.$$

Dávid Péter (Szentendrei gimn. IV. o.)

Megoldotta: Dömölki B.