Legyen $a=p^2+q^2$. Vizsgáljuk először a-nak páratlan kitevőjű hatványát.

$$a^{2n+1}=a^{2n}\cdot a=a^{2n}(p^2+q^2)=a^{2n}p^2+a^{2n}q^2=(a^np)^2+(a^nq)^2,$$

az összeg mindkét tagja négyzetszám. Vagyis

$$a^{2n+1}=c^2+d^2,\qquad c=a^np,\qquad d=a^nq.$$

Páros kitevőjű hatványokra a bizonyítás így alakul: legyen $n=2$

$$a^2=(p^2+q^2)^2=(p^2-q^2)^2+4p^2q^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2.$$

tehát $\qquad a^2=r^2+s^2,\qquad r=p^2-q^2,\qquad s=2pq.$
Ha a kitevő $2n$ ($n>1$), akkor a számot szétbontjuk két tényező szorzatára

$$a^{2n}=a^{2n-2}\cdot a^2=a^{2n-2}(r^2+s^2)$$

azaz

$$a^{2n}=t^2+u^2,\qquad t=a^{n-1}r,\qquad u=a^{n-1}s.$$

Kántor Sándor (Debreceni gimn. II/b.)

Megoldotta: ifj. Csonka P.