I. megoldás: Azt kell kimutatnunk, hogy a megadott kifejezés 9^2-nel osztható. E célból e kifejezést átalakítjuk

$$10^n(9n-1)+1=10^n 9n-(10^n-1).$$

A különbség mindkét tagja osztható 9-cel, tehát maga a szám is osztható 9-cel. Vizsgáljuk most a 9-cel való osztás hányadosát. Az első részt osztva 9-cel a hányados $n10^n$. A második rész – minthogy n számú 9-es jegyből álló szám – hányadosul n számú 1-es jegyből álló számot ad. Nézzük most meg a hányados ezen két tagját külön-külön a 9-cel való oszthatóság szempontjából. 10 bármely hatványa 9-ce1 osztva 1 maradékot ad, tehát $n10^n$-t osztva 9-cel a maradék ugyanannyi, mintha n-et osztanánk 9-cel. A hányados másik részét osztva 9-cel, a maradék ugyanannyi, mintha a számjegyek összegét, azaz n-et osztanánk 9-cel. A kettő különbsége 9-cel osztva 0 maradékot ad, vagyis a 9-cel való osztás hányadosa ismét osztható 9-cel. A megadott szám tehát $9\cdot 9$, azaz 81-gyel osztható.

Megoldotta: Dávid P., Dievald Emilia, Főző Éva, Kalmár L., Lipák I., Osztein P., Villányi O.

II. megoldás: $10^n(9n-1)+1=9n10^n-(10^n-1)$. Itt $n10^n$ így írható: $10^n+10^n+10^n+\ldots+10^n$. 10^n-1 viszont mint két n-edik hatvány különbsége így bontható fel:

$$10^n-1=(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1).$$

Ezeket az azonosságokat behelyettesítve az eredeti kifejezésbe, az

$$9\left[(10^n-10^{n-1})+(10^n-10^{n-2})+\ldots+(10^n-10)+10^n-1\right]$$

alakúvá válik.
A zárójelben lévő kifejezések mind 10^n-10^k alakúak, ezek $10^k(10^{n-k}-1)$ alakúak lévén – oszthatók 9-cel, s így összegük is ugyanilyen tulajdonságú. Ezzel tehát igazoltuk, hogy az adott szám 81-gyel, osztható.

Csere Ilona (Kisfaludy Károly gimn. I/c.)

Megoldotta: Durst E.

III. megoldás: Ha $n=1$, akkor $10(9-1)+1=9\cdot 10-(10-1)=9\cdot 9=81$ s így 81-gyel osztható.

A tétel érvényességét minden n-re teljes indukcióval igazoljuk. Tegyük fel, hogy a 81-gyel való oszthatóság igaz n egy bizonyos értékére. Kimutatjuk, hogy ebből következik, hogy $n+1$-re is igaz. Vizsgáljuk meg, mennyivel nő a szám értéke, ha n helyébe $n+1$-et helyettesítünk.

$$\begin{gathered}10^{n+1}\left[9(n+1)-1\right]+1-\left[10^n(9n-1)+1\right]=\\=9n10^n(10-1)-9\cdot 10^n+9\cdot 10^{n+1}=\\=81n10^n+9\cdot 10^n(10-1)=81\cdot 10^n(n+1).\end{gathered}$$

Tehát ha n helyébe $n+1$-et teszünk, ezzel 81 többszörösével növeljük a számot, tehát az új szám ismét 81-gyel osztható lesz.

Kántor Sándor (Debreceni gimn. II/b.)

Megoldotta: Dömölki B., Kovács L., Sajó J., Turi I., Zatykó L., Zobor E.