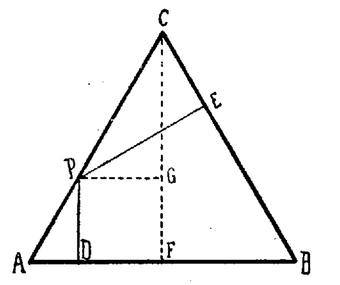
I. megoldás: Legyen ABC egy szabályos háromszög, P egy pont.

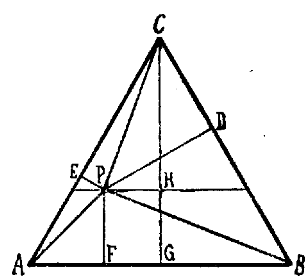
Ha P a háromszög kerületén, pl. a CA oldalon van (23. ábra), akkor legyen az AB és BC oldalakra bocsátott merőlegesek talppontja D és E, a C-ből húzott magasságé F, a P-ből CF-re bocsátott merőlegesé pedig G.



23. ábra

$CEP\triangle \cong PGC\triangle$, mert egy oldaluk közös, derékszögűek, végül $CPG\sphericalangle = PCE\sphericalangle = 60°$. Így $PE = CG$, másrészt $PD = GF$, tehát $PD + PE = CF$.

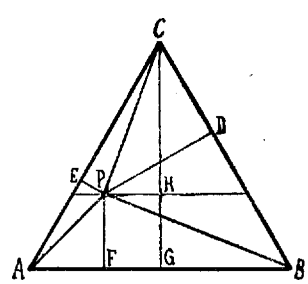
Ha P a háromszög belsejében van, legyen belőle a BC, CA, AB oldalakra bocsátott merőlegesek talppontja D, E, F. (24. ábra)



24. ábra

Húzzunk P-n át AB-vel párhuzamost, továbbá húzzuk meg a C csúcsból a magasságot. Legyen ennek talppontja G, metszéspontja a P-n áthúzott párhuzamossal H. Keletkezett egy kisebb szabályos háromszög, melynek P a kerületén fekszik és melynek magassága CH, tehát az előbbiek szerint $PD + PE = CH$. Mivel továbbá $PF = HG$, $PD + DE + PF = CG$, a háromszög magasságával, tehát független a P pont helyzetétől.

II. megoldás: Legyen az ABC szabályos háromszög oldalhossza a. Egy P pontból a BC, CA, AB oldalakra bocsátott merőlegesek hossza p_1, p_2, p_3 (egy vagy kettő közülük 0 is lehet, ha P a kerületre, vagy épp az egyik csúcsba esik). A BPC, CPA, APB háromszögek együtt az ABC háromszöget adják (24. ábra).



24. ábra

Így a háromszög területét kiszámítva, mivel $AB = BC = CA = a$,

$$\frac{ap_1}{2} + \frac{ap_2}{2} + \frac{ap_5}{2} = \frac{am}{2}, \quad \text{tehát} \quad p_1 + p_2 + p_3 = m.$$

ahol m az $ABC\triangle$ magassága, tehát a P ponttól független távolság.