I. megoldás: Általánosabban megmutatjuk, hogy *azon tégla alakú testek közül, melyek éleinek összege adott, a kocka a legnagyobb térfogatú.*

Jelöljük a, b, c-vel az egy csúcsban találkozó éleket. Feltétel szerint ezek összege adott. A tégla térfogata abc. Állításunk következik abból, hogy három pozitív szám számtani közepe (különben akárhány számra igaz az állítás) nagyobb a mértani középnél, vagy egyenlő vele; de egyenlőség csak akkor áll, ha a három szám egyenlő. Esetünkben a számtani közép: $\frac{a+b+c}{3}=s$ feltétel szerint állandó. $\sqrt[3]{abc}\leqq s$, vagyis $abc\leqq s^3$, a mondottak szerint, tehát a maximális térfogat s^3 és ezt akkor éri csak el a tégla, ha $a=b=c=s$, tehát a kocka a keresett tégla.

A felhasznált egyenlőtlenséget így bizonyíthatjuk: ha nem mind a három szám egyenlő, akkor kell köztük s-nél kisebbnek is, nagyobbnak is lenni. Legyen $a=s-\alpha<s<s+\beta=b$, $c=s+\alpha-\beta$, α, $\beta>0$. Ekkor

$$\begin{gathered}abc=(s-\alpha)(s+\beta)(s+\alpha-\beta)=\left[s(s-\alpha+\beta)-\alpha\beta\right](s+\alpha-\beta)<\\<s(s-\alpha+\beta)(s+\alpha-\beta)=s^3-(\alpha-\beta)^2s<s^3.\end{gathered}$$

Ezzel megmutattuk állításunkat.

II. megoldás: Jelöljük a négyzetes oszlop alapéleit x-szel, magasságát y-nal. Ekkor térfogata $K=x^2y$, $y=a-2x$, ahol a (az egy csúcsba összefutó élek összege) feltétel szerint állandó.

$$\frac{dK}{dx}=2xy+x^2y'=2x(y-x),$$

mert $y'=-2$. Mivel $x=0$ nem jön tekintetbe, csak $y=x=\frac{a}{3}$, tehát a kocka lehet a feladat megoldása és itt a függvénynek valóban maximuma van.