Próbáljuk meg az $ax^3+bx^2+cx+d=0$ egyenlet bal oldalát $r(x+s)^3-t(x+u)^3$ alakban írni. Ekkor egy harmadik gyökvonással elsőfokú egyenletre jutunk. Ez az említett feladatban szereplő egyenletrendszerre vezet: $r-t=a$, $rs-tu=\frac{b}{3}$, $rs^2-tu^2=\frac{c}{3}$, $rs^2-tu^3=d$. Az ott használt módszerrel kapjuk, hogy s és u az $X^2-AX+B=0$, egyenlet két gyöke, ahol

$$A=\frac{bc-9ad}{b^2-3ac},\quad B=\frac{c^3-3bd}{b^2-4ac},$$
$$(s-u)r=\frac{b}{3}-au=C,\quad (s-u)t=\frac{b}{3}-as=D.$$

Ezek felhasználásával egyenletünk így írható: $r(x+s)^3=t(x+u)^3$, tehát $\sqrt[3]{r}(x+s)=\varrho\sqrt[3]{t}(x+u)$, ahol ϱ egy olyan számot jelent, melynek köbe 1, vagyis a $\varrho^3-1=(\varrho^2+\varrho+1)(\varrho-1)=0$ egyenlet valamelyik gyökét, tehát $\varrho_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho_3=1$. Ezeket a mennyiségeket harmadik egységgyöknek nevezzük. Figyeljük meg, hogy

$$\varrho_1^2=\varrho_2,\quad \varrho_2^2=\varrho_1,\quad \varrho_1+\varrho_2=\varrho_1+\varrho_1^2=\varrho_2+\varrho_2^2=-1.$$

Egyenletünk megoldásai tehát:

$$x=\frac{\varrho u\sqrt[3]{t}-s\sqrt[3]{r}}{\sqrt[3]{r}-\varrho\sqrt[3]{t}},\quad \text{ahol}\quad \varrho_1,\quad \varrho_2,\quad \text{vagy}\quad \varrho_3.$$

ϱ mindhárom értéke mellett igaz a következő azonosság:

$$a^3-b^3=(a^2+\varrho ab+\varrho^2b^2)(a-\varrho b).$$

Ezt felhasználva előző egyenleteink szerint:

$$\begin{aligned}x&=\frac{\left(\varrho u\sqrt[3]{t}-s\sqrt[3]{r}\right)\left(\sqrt[3]{r^2}+\varrho\sqrt[3]{rt}+\varrho^2\sqrt[3]{t^2}\right)}{t-r}=\\&=\frac{tu-sr+\varrho(u-s)\sqrt[3]{rt^2}+\varrho^2(u-s)\sqrt[3]{rt^2}}{r-t}=\\&=-\frac{b}{3a}+\frac{\varrho}{a}\sqrt[3]{-\left[(s-u)r\right]^2(s-u)t}+\frac{\varrho^3}{a}\sqrt[3]{-(s-u)r\left[(s-u)t\right]^2}=\\&=-\frac{b}{3a}+\frac{\varrho}{a}\sqrt{-C^2D}+\frac{\varrho^2}{a}\sqrt{-CD^2}.\end{aligned}$$

Áttekinthetetlenné válna a formula, ha C-t és D-t kifejeznénk a, b, c, d-vel, célszerű ezért először az egyenletet lehetőleg egyszerűsíteni. Először is oszthatunk a-val, de ezen kívül ki is küszöbölhetjük pl. a másodfokú tagot $x+a$ helyett új változót vezetve be és a-t alkalmasan választva. Az átrendezett egyenlet másodfokú tagjának együtthatója ekkor $\frac{b}{a}-3a$, tehát $a=\frac{b}{3a}$-nak válaszható. Ezeket az átalakításokat elvégezve ilyen alakú egyenlethez jutunk: $x^3+px+q=0$. Elég tehát az ilyen alakú egyenletek megoldását felírni. Ekkor a, b, c, d helyébe 1, 0, p, q kerül, tehát $A=\frac{3q}{p}$, $B=-\frac{p}{3}$, $u,\, s=+\frac{3q}{2p}\pm\sqrt{\left(\frac{3q}{2p}\right)^3+\frac{p}{3}}$, $C=-u$, $D=-s$, tehát

$$\begin{aligned}x&=\varrho\sqrt[3]{-\frac{p}{3}u}+\varrho^2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}s}=\\&=\varrho\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^2}}+\varrho^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.\end{aligned}$$

Ezt a formulát nevezik CARDANO-féle formulának.

Megjegyzés: A 91 *b* feladatra Vörös Miklós „nem"-mel válaszol és be is bizonyítja igazát, mármint azt, hogy nem bontható fel a kifejezés két *olyan* elsőfokú kifejezés köbére, melyben minden együttható *racionális.* A 92. feladatnál Kővári Tamás állítja azt, hogyha (a fenti jelölésekkel) $A^2-4B<0$, akkor nem oldható meg a harmadfokú egyenlet, mert nem sikerül a két köbre bontás. Neki is igaza van, mert valóban nem sikerül a felbontás *valós* együtthatós kifejezések köbére. Mindkét megjegyzés arra mutat, hogy a feladat hiányosan van megfogalmazva. Minden ilyen felbontási kérdésnél meg kell azt is mondani, hogy a keresett kifejezések együtthatói milyen fajta számok lehetnek. Ha erre külön utalás nincs, akkor általában úgy szoktuk érteni a feladatot – ebben állapodjunk is meg a továbbiakra –, hogy együtthatóul *bármely valós, vagy komplex szám* szerepelhet. Ezt indokolja az pl. hogy éppen ha egyenletet akarunk megoldani, akkor már másodfokúnál komplexek lehetnek a gyökök, ha valósak voltak is az együtthatók, tehát valahol bele kell jönnie komplex számoknak számításainkba.

Harmadfokú egyenletnél még meglepőbb a helyzet. ϱ és ϱ^2 a három lehetséges érték közül kettőre konjugált komplex számpár. A formula három valós eredményt csak úgy adhat, ha vagy mind a kettő ugyanazzal a valós számmal van megszorozva (ebben az esetben a két gyök egyenlő), különben csak, ha ϱ és ϱ^2 együtthatói konjugált komplexek, tehát épp az $A^2 - 4B < 0$ esetben. Azt is meg lehet mutatni, hogy nem is lehet alapműveletek és gyökvonások segítségével olyan formulát találni, mellyel mindig megkapnánk a három gyököt, mégpedig ha mind a három valós, akkor csupa valós számmal számolva. Három különböző valós gyökű egyenletet pedig könnyű felírni, pl. $(x-1)(x-2)(x-3)=0$. Ha itt beszoroztok és a fenti módon számítjátok ki a gyököket, azokban nehezen ismernétek rá az 1, 2, 3 számokra.

Sokszor még akkor sem könnyű látni a formulából, hogy mennyi is az x, hogyha egy valós gyököt kapunk valós alakban. Számítsuk ki pl. az $(x-1)(x^2+x+4) = x^3+3x-4=0$ egyenlet valós gyökét, azután próbáljuk megmutatni, hogy az 1. (A szorzatalakban a vak is látja, hogy a valós gyök $x=1$; a másik két gyök komplex szám.

De van egy harmadik nagy hibája is a megoldási formulának, t. i. nem található minden egyenlethez. Negyedfokúhoz még van. Aki nagyon ügyes köztetek, az vissza is tudja vezetni a harmadfokúéra hasonló módon, mint fentebb a harmadfokúét meg a másodfokú egyenlet megoldására vezettük vissza. Bebizonyították azonban, hogy ötöd- és magasabb fokú egyenletre nincs olyan általános megoldási formula, mely az együtthatókból véges számú alapművelettel és gyökvonással adná meg a megoldást.

A gyakorlatban egész együtthatós egyenleteknek meg lehet keresni az esetleges egész és racionális gyökeit, a többit meg közelítő eljárásokkal szokták a szükséges pontossággal kiszámítani.

Szerk.