

Többen az egész rész $[]$ jelét $| |$ -nek (abszolút érték) olvasták. Az $[]$ jel értelme megtalálható a 85. feladat szövegében. (V. feladatív, L.49. oldalon is.)

I. Megoldás. A bebizonyítandó egyenlőtlenséget elég a bal oldal lehető legnagyobb értéke esetére megmutatni. Az $\frac{n}{n+1}$ tört értéke nő, ha n értéke nő, mert ha $n_1 > n_2$,

$$\begin{aligned} & \frac{n_1}{n_1+1} - \frac{n_2}{n_2+1} - \frac{n_1(n_2+1) - n_2 \cdot (n_1+1)}{(n_1+1) \cdot (n_2+1)} = \\ & = \frac{n_1 - n_2}{(n_1+1) \cdot (n_2+1)} > 0, \quad \text{vagyis} \quad \frac{n_1}{n_1+1} > \frac{n_2}{n_2+1}. \end{aligned}$$

n lehető legnagyobb értéke $n = [a]$ és ennek helyettesítésével a következő egyenlőtlenséget kell csak igazolnunk:

$$[a] > \frac{[a]}{[a]+1} \cdot a = [a] \frac{a}{[a]+1}.$$

Ez pedig helyes, mert $a < [a] + 1$ folytán az utolsó tört értéke 1-nél kisebb.

Megoldotta: Fried E., Tarnóczy T.

II. Megoldás. Próbáljuk meg a bebizonyítandó egyenlőtlenséget barátságosabb formára hozni. Ha egy egyenlőtlenség helyes, akkor újra helyes egyenlőtlenséget kapunk belőle, ha mindkét oldalához ugyanannyit hozzáadunk, vagy ugyanannyit levonunk belőlük, vagy ha pozitív számmal megszorozzuk, vagy elosztjuk is. (Negatív számmal való szorzás után már az ellenkező egyenlőtlenség fog fennállni). Az ilyen átalakítások vissza is alakíthatók, hisz megint csak a négy alapműveletet kell helyes egyenlőtlenségekre alkalmazni. Így a fenti egyenlőtlenség helyett elegendő, ha (a pozitív $n+1$ -gyel szorozva) az $(n+1)[a] > na$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk; vagy – hogy az ismerős $a - [a]$ kifejezés tulajdonságait felhasználhassuk, – vonjuk le mindkét oldalából $n \cdot [a]$ -t: elég a következő egyenlőtlenséget bebizonyítani: $[a] > n(a - [a])$. Ez meg szinte magától értetődik, mivel feltétel szerint $n \leq a$, de még egész szám is, tehát $n \leq [a]$ kell, hogy legyen és $a - [a] < 1$. Mindkét egyenlőtlenségben pozitív számok szerepelnek, így a baloldalak szorzata is kisebb a jobboldalakénál, vagyis az utolsó egyenlőtlenség helyes.

Megoldotta: Gacsályi S., Gehér L., Gósi S., Izsák I., Lantos T., Személyi J., Vemes R.