$$[n \cdot a] = [a] + \left[a + \frac{1}{n}\right] + \left[a + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[a + \frac{n-1}{n}\right].$$

Legyen $a = [a] + k$, $0 \leqq k < 1$. Jelöljük m-mel azt az egész számot, melyre $\frac{m}{n} \leq k < \frac{m+1}{n}$. Ekkor $0 \leq k + \frac{i}{n} < 1$, ha $0 \leqq i \leqq n - m - 1$ és $1 \leqq k + \frac{i}{n} < 2$, ha $n - m \leqq i \leqq n - 1$. Így egyrészt $[n \cdot a = n[a] + m$, másrészt az $\left[a + \frac{i}{n}\right] = [a] + \left[k + \frac{i}{n}\right]$ tagok közül az első $n - m$ számú értéke $[a]$, a további m számú érték $[a] + 1$, tehát

$$[a] + \left[a + \frac{1}{n}\right] + \left[a + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[a + \frac{n-1}{n}\right] = n[\alpha] + m = [n \cdot a].$$