65. *a.)*

$$x + y = 4 \tag{1}$$
$$xz + yu = 7 \tag{2}$$
$$xz^2 + yu^2 = 12 \tag{3}$$
$$xz^3 + yu^3 = 21 \tag{4}$$

I. megoldás: x-et elimináljuk az (1) és (2), a (2) és (3), végül a (3) és (4) egyenletekből.

$$yz - yu = 4z - 7 \tag{5}$$
$$yzu - yu^2 = 7z - 12 \tag{6}$$
$$yzu^2 - yu^3 = 12z - 21 \tag{7}$$

Elosztom (6)-ot (5)-tel és (7)-et (6)-tal:
$u = \dfrac{7z-12}{4z-7} = \dfrac{12z-21}{7z-12}$. Ez másodfokú egyenletet ad z-re. $z^2 - 3 = 0$, $z = \pm\sqrt{3}$; $u = -\sqrt{3}$, ha $z = \sqrt{3}$ és $u = \sqrt{3}$, ha $z = -\sqrt{3}$, x-re és y-ra az (1), (2) egyenletek $\dfrac{12+7\sqrt{2}}{6}$, $\dfrac{12-7\sqrt{3}}{6}$, illetve $\dfrac{12-7\sqrt{3}}{6}$, $\dfrac{12+7\sqrt{3}}{6}$ értéket adnak, aszerint, hogy $z = +\sqrt{3}$, vagy $z = -\sqrt{3}$.

Ungár Péter (Bpest, evangélikus gimn. VII. o.)

Megoldották: Bánó Klára, Bécsy Cecília, Boda I., Csordás L., Csuhássy Edit, Fülöp M., Gaál E., ifj. Gacsályi S., Gehér L., Hosszú M., Izsák I., Kemény Judit, Kővári T., Magyar Á. Sz., Pál L., Párkány M., Róna P., Sós Vera, Spitz Vera, Szathmári D., Szépfalussy P., Szűcs L., Váczy Irén, Vékony Mária, Vörös M., Zsulán J.

II. megoldás:

$$(xz + yu)\cdot(z+u) = xz^2 + yu^2 + xuz + yuz = \\ = xz^2 + yu^2 + uz(x+y)$$

és

$$(xz^2 + yu^2)(z+u) = xz^3 + yu^3 + xz^3u + yzu^2 = \\ = xz^3 + yu^3 + uz(xz + yu).$$

Ebből az (1)–(4) egyenleteket figyelembe véve $z+u$ és zu-ra a következő elsőfokú egyenletrendszert kapjuk:

$$7(z+u) = 12 + 4\cdot zu, \\ 12(z+u) = 21 + 7\cdot zu.$$

Innen

$$z + u = 0, \quad zu = -3$$

z és u tehát a következő egyenlet két gyöke

$$X^2 - 3 = 0, \quad \text{tehát} \quad z = \sqrt{3}, \quad u = -\sqrt{3}.$$

(1) és (2) egyenletből:

$$x + y = 4, \quad x - y = \frac{7\sqrt{3}}{3}, \quad x = 2 + \frac{7\sqrt{3}}{6}, \quad y = 2 - \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

Ha z és u értékét felcserélve választjuk, x és y is felcserélődik, ami szimmetrikus szerepükből is nyilvánvaló.

Silfen Péter (Bpest., Bolyai reálisk. VII. o.)

65. *b.)*

$$x^3 + y^3 = 1 \\ x^2z + y^2u = 0 \\ xz^2 + yu^2 = -2 \\ z^3 + u^3 = 22.$$

Megoldás: $x^3=X$, $\quad y^3=Y$, $\quad \frac{z}{x}=Z$, $\quad \frac{u}{y}=U$ helyettesítéssel az $X+Y=1$, $\quad XZ+YU=0$, $\quad XZ^2+YU^2=-2$, $\quad XZ^3+YU^3=22$ egyenletrendszert kapjuk, ami ugyanúgy oldható meg, mint az *a)* alatti feladat és az

$$X=\frac{1}{2}-\frac{11}{2\sqrt{113}},\quad Y=\frac{1}{2}+\frac{11}{2\sqrt{113}},\quad Z=\frac{-11-\sqrt{113}}{2},$$
$$U=\frac{-11-\sqrt{113}}{2}$$

eredményre vezet. Szimmetria okokból ismét X-et Z-vel, Y-t U-val felcserélve, kapjuk az egyenletrendszer másik megoldását.

Megoldották: Boda I., Fülöp M., Gaál E., Gehér L., Izsák I., Kővári T., Magyar Á. Sz., Róna P., Ungár P.