Olyan töröttvonal létezését bizonyítjuk, amelyik nem záródik. Világos, hogy nem változtat a feladaton, ha azt tesszük fel, hogy *legalább* $2kn+1$ átló van berajzolva.

A feladat állítását k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $k=0$ esetén 1 átló van berajzolva, és ez megfelel a feltételnek.

Tegyük most fel, hogy adott (elegendő nagy) n esetén az n-oldalú sokszögekre k-nak valamilyen j értékével igaz az állítás, és egy n-szögben $2(j+1)n+1$ átló van berajzolva. Ekkor az olyan csúcsoknál (ha vannak), amelyekből egy berajzolt átló indul, hagyjuk egyelőre figyelmen kívül ezt az átlót, amelyekből pedig egynél több átló indul, ott a hozzá a két oldalon legközelebbi csúcshoz vezető átlót. Ezzel legfeljebb $2n$ átlót hagyunk el. Ekkor legalább $2jn+1$ berajzolt átló marad meg, tehát kiválasztható közülük egy $2j+1$ átlóból álló töröttvonal. Jelöljük ebben az első és utolsó átlót A_0A_1, illetve $A_{2j}A_{2j+1}$-gyel.

A töröttvonal az A_0A_1, illetőleg az $A_{2j}A_{2j+1}$ egyenesek egyik oldalára esik, hiszen nem megy át egy ponton egynél többször, és a sokszög konvex. Miután maradt még a végpontokból induló, behúzott átló, így azokban két-két átlót hagytunk figyelmen kívül. Ekkor azonban hozzácsatolhatjuk mindegyik végponthoz azt az eddig figyelmen kívül hagyott átlót, amelyik a szélső szakasz egyenesének a másik oldalára esik, mint a töröttvonal. Ezzel $2(j+1)+1$ szakaszból álló töröttvonalat kapunk. A bizonyítandó állítás helyessége tehát öröklődik $2(j+1)n+1$ átló berajzolása esetére is, így minden k-ra igaz.

A feladat második állítására térve az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a sokszög szabályos. A könnyebb tárgyalásmód kedvéért mondjunk egy átlót h hosszúságúnak, ha az egyik oldalára a sokszögnek h oldala esik, a másikra ennyi vagy ennél több. Megjegyezzük, hogy egy n oldalú sokszögbe akkor rajzolható be nk átló, ha páratlan n esetén $n \geq 2k+3$, páros n esetén pedig $n \geq 2k+4$.

Belátjuk, hogy az állítás igazolására alkalmas a következő konstrukció: páratlan n esetén minden csúcsból meghúzzuk a k leghosszabb átlót, páros n esetén pedig a k leghosszabb átlót a „legesleghosszabb” (a szemközti csúcsokhoz vezető) kivételével. Így minden csúcs $2k$ átló végpontja, tehát $2kn$ átlóvégpont, azaz kn átló jön létre.

Tegyük fel, hogy kiválasztható r szakaszból álló, $A_0A_1\ldots A_{r-1}A_r$ nyílt töröttvonal, amelyik egy ponton sem megy át egynél többször. Az A_0A_1 egyenes határolta egyik félsíkba esik az egész töröttvonal, így nem mehet át a töröttvonal az ellenkező oldalra eső félsík belsejében levő sokszögcsúcsokon, és ugyanez mondható az $A_{r-1}A_r$ egyenesről is (*4. ábra*). Ez a két átló nem metszi egymást, így az A_i csúcsok a sokszög kerületének az egyeneseik közti két szakaszán helyezkednek el.

Ha n páratlan, $n=2m+1$, akkor a kizárt sokszögcsúcsok száma legalább $2(m-k)$, a töröttvonalak száma legfeljebb $n-2(m-k)=2k+1$, és így a töröttvonal $r \leq 2k$ szakaszból áll.

Ha az oldalszám páros, $n=2m$, akkor a berajzolt leghosszabb átló hossza $m-1$, a legrövidebbé $m-k$. A fenti gondolatmenettel ezért csak $r \leq 2k+1$ adódik, így gondosabban szemügyre kell venni a konstrukciót.

Ha valamelyik íven van két szomszédos csúcs, akkor az ezeken átmenő egyenesnek a másik oldalán, mint amelyiken a másik ív van, nem lehet csúcsa a töröttvonalnak. Ekkor

$$r+1 \leq n-3(m-k-1), \qquad \text{vagyis} \qquad r \leq 2k+(k+2-m) \leq 2k$$

az előrebocsátott megjegyzés szerint.

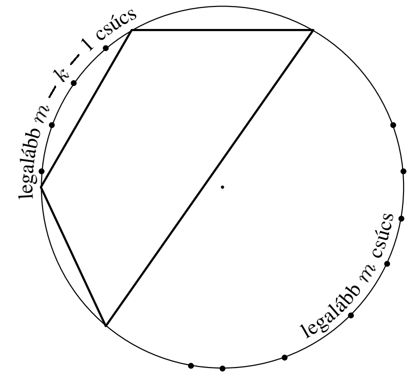
Ha viszont a csúcsok felváltva a két íven vannak (a töröttvonal „cikkcakkban” halad), és pl. az A_0A_1 egyenesnek a töröttvonalat nem tartalmazó oldalára a sokszög kerületének a felénél nagyobb része, tehát legalább m csúcsa esik, akkor a töröttvonal csúcsainak száma legfeljebb $k+1$, mivel az $A_{r-1}A_r$ egyenesnek a töröttvonalat nem tartalmazó oldalán legalább $m-k-1$ csúcs van (*5. ábra*).

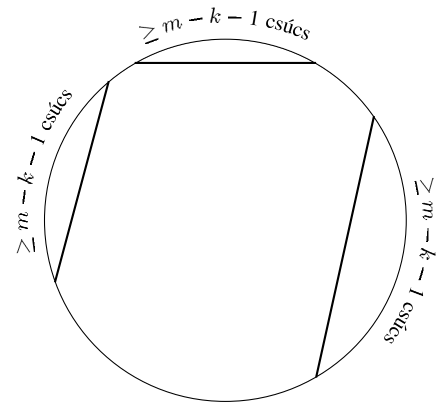
Ha a sokszög középpontja a két átló egyenese közt, tehát valamelyik $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ háromszögben van (*6. ábra*), akkor az A_i-vel szemközti sokszögcsúcs nem lehet a töröttvonal csúcsa, így a töröttvonalnak legfeljebb

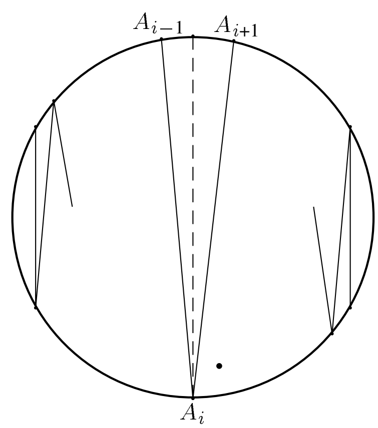
$$2m-2(m-k-1)-1=2k+1$$

csúcsa lehet, s így legfeljebb $2k$ átlóból állhat.

Megjegyzés. A gondolatmenet pontosabb elemzésével belátható, hogy zárt töröttvonalat is megengedve az eljárás csak hatszög és $k=1$ esetén enged meg 3 $(=2k+1)$ hosszúságú töröttvonalat, ekkor azonban a *7. ábrán* látható ellenpélda szolgáltat megoldást.




$\geq m-k-1$ csúcs
$\geq m-k-1$ csúcs
$\geq m-k-1$ csúcs


A_{i-1}
A_{i+1}
A_i