

**I. megoldás.** Legyen a küldöttségek létszáma  $n$ . Az  $A$  országbeli minden csoporthoz hozzárendelünk egy zérusokból és egyesekből álló  $n$ -elemű sorozatot; ennek a  $j$ -edik eleme 0, ha a  $B$ -beli küldöttség  $j$ -edik tagja páros számú embert ismer a csoportból, és 1, ha páratlan számút ismer. Így egyrészt  $2^n$  különböző sorozat keletkezhet, másrészt  $2^n - 1$  különböző csoport választható ki az  $A$ -beli küldöttségből. Ha mindegyik csoporthoz különböző sorozat tartozik, akkor tehát a  $(0, 0, \dots, 0)$  és az  $(1, 1, \dots, 1)$  legalább egyike előfordul, vagyis az a) és b) lehetőségeknek legalább egyike teljesül.

Ha van két különböző csoport, amelyekhez ugyanaz a sorozat tartozik, akkor vegyük azokat a küldötteket, akik az elsőben benne vannak, a másodikban nincsenek benne, továbbá azokat, akik az elsőben nincsenek benne, a másodikban benne vannak. Mivel a két csoport különböző, elhagyva azokat (ha vannak), akik mindkét csoporthoz hozzátartoznak, legalább egy  $A$ -beli küldött marad. Ekkor minden  $B$ -beli küldött első csoportbeli ismerőseinek a száma ugyanannyival változik, mint a másodikbeli ismerőseinek a száma, a két megmaradt részcsoporthoz tartozó küldött ismerőseinek az együttes száma tehát páros. Az így keletkezett csoportra ekkor az a) lehetőség teljesül.

**II. megoldás.** A küldöttségek létszáma ( $n$ ) szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk a feladat állítását. Egytagú küldöttségek esetén az  $A$ -beli küldöttet vagy ismeri a  $B$ -beli küldött, vagy nem. Ennek megfelelően a b) vagy az a) lehetőség teljesül.

Tegyük most fel, hogy  $n$ -tagú küldöttségek esetén igaz a bizonyítandó állítás, és tekintsünk két  $(n + 1)$ -tagú küldöttséget. Az  $A$ -beli küldöttség tagjait jelöljük  $a_i$ -vel, a  $B$ -beli tagjait  $b_i$ -vel,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül  $b_{n+1}$ -et. Ha sorra figyelmen kívül hagyjuk  $a_1$ -et,  $a_2$ -t,  $\dots$ ,  $a_{n+1}$ -et, akkor a megmaradók közül mindig van legalább egy jó kiválasztás, tehát olyan, amelyikhez vagy az  $n$ -darab 0-ból álló sorozat, vagy az  $n$  darab 1-ből álló sorozat tartozik.

Ezek a jó kiválasztások az  $(n + 1)$ -tagú küldöttségből is kiválasztások. Közülük egyesek állhatnak ugyanazokból az  $A$ -beli küldöttekből, de nem kaphattuk mindegyik esetben ugyanazt a csoportot, mert mindegyik  $A$ -beli küldöttet figyelmen kívül hagytuk egyszer. Vegyünk két különböző jó kiválasztást. Ha valamelyikből  $b_{n+1}$  is ugyanolyan páros-ságú embert ismer, mint a küldöttsége többi tagjai, akkor a csoportra teljesül a megfelelő lehetőség az egész  $B$ -beli küldöttséget véve is tekintetbe.

Ha nem ez a helyzet, és mind a két csoporthoz az  $n$  darab  $c$ -ből álló sorozat tartozik, ahol  $c$  vagy 0, vagy 1, akkor a  $b_{n+1}$ -hez tartozó szám mind a két csoport esetében  $1 - c$ . Ha a két csoporthoz különböző  $n$ -elemű sorozatok tartoznak, akkor  $b_{n+1}$  az egyik csoportból páratlan számú embert ismer, a másiktól páros számút, csak fordított sorrendben, mint a többiek.

Vegyük azokat az  $A$ -beli embereket, akik valamelyik csoportban benne vannak, de nem mind a kettőben. Ekkor minden  $B$ -beli embernek ugyanannyival változik az első csoportbeliek közti ismerőseinek a száma, mint a második csoportbeliek közöttieké. Így a megmaradtak között az első esetben minden  $b_i$ -nek összesen páros számú ismerőse van, beleértve  $b_{n+1}$ -et is; a második esetben viszont minden  $B$ -beli küldöttnak,  $b_{n+1}$ -nek is páratlan számú ismerőse van. Található tehát jó kiválasztás  $(n + 1)$ -tagú küldöttségek esetében is. Ez a tulajdonság tehát öröklődik, így akárhány tagú küldöttségre fennáll.