I. megoldás. Jelöljük az átlók metszéspontját E-vel, az AB, BC, CD, DA, AE, EC, BE, ED szakaszok hosszát rendre a, b, c, d, e_1, e_2, f_1, f_2-vel (*1. ábra*). Ekkor azt kell igazolnunk, hogy $bd \geq ac$.

Mivel minden tényező pozitív, azért ez egyenértékű annak igazolásával, hogy $b^2d^2 \geq a^2c^2$.

Mindegyik tényező egy-egy derékszögű háromszög átfogója. Ezeket Pitagorasz tétele alapján kifejezve az

$$\left(e_2^2+f_1^2\right)\left(e_1^2+f_2^2\right) \geq \left(e_1^2+f_1^2\right)\left(e_2^2+f_2^2\right)$$

egyenlőtlenséget kell igazolnunk, vagy átrendezve a következőt:

$$\left(e_1^2-e_2^2\right)\left(f_1^2-f_2^2\right) \geq 0.$$

Ez viszont igaz, mert az AEB és a CED háromszögek hasonlók, így

$$e_1 \geq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \geq f_2 \qquad \text{vagy} \qquad e_1 \leq e_2 \quad \text{és} \quad f_1 \leq f_2.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha a két háromszög egybevágó, azaz az átlók felezik egymást, tehát a trapéz paralelogramma, mivel pedig az átlói merőlegesek, így rombusz. Ekkor az oldalak egyenlők, s így a két szorzat valóban egyenlő.

II. megoldás. Ismeretes – és a Pitagorasz-tétel négyszeri alkalmazásával könnyen belátható – hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek, ha a szemközti oldalpárok négyzetének az összege egyenlő. Az előző megoldás jelöléseit használva fennáll tehát a következő egyenlőség:

$$b^2+d^2=a^2+c^2.$$

Átrendezve és teljes négyzetté kiegészítve ebből az

$$(b+d)^2-(a+c)^2=2(db-ac) \tag{1}$$

egyenlőség adódik. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy a bal oldal nemnegatív. Ehhez kiegészítjük az ábrát. Hosszabbítsuk meg a BA oldalt A-n túl az $AF=c$ szakasszal, továbbá jelöljük C tükörképét E-re G-vel (*2. ábra*). Ekkor $ACDF$ paralelogramma, a $BCDG$ deltoidban pedig $BG=b$ és $GD=c$. Így $AGDF$ szimmetrikus trapéz, tehát $GF=d$.

A BGF háromszögből a háromszögegyenlőtlenség szerint

$$b+d \geq a+c,$$

tehát (1) bal oldala valóban nemnegatív. Egyenlőség akkor áll fenn, ha G A-ba esik, vagyis a trapéz átlói felezik egymást, továbbá feltétel szerint merőlegesek, tehát a négyszög rombusz.

III. megoldás. Húzzunk párhuzamosokat a trapéz csúcsain át az átlókkal. Ezek egy $PQRS$ téglalapot határolnak, amit az átlók résztéglalapokra osztanak, így $PE=a$, $QE=b$, $RE=c$, $SE=d$ (*3. ábra*). Az ABE és CDE háromszögek hasonlók, így az $APBE$ és a $CRDE$ téglalapok is, tehát a PE és az ER átló egy egyenesbe esik, együtt a nagy téglalap átlóját alkotják.

Az ábrán ac eszerint úgy jelenik meg, mint a téglalap köré írt kör átmérője két szeletének szorzata. Messe SE a kört másodszor az S' pontban. Tudjuk, hogy ekkor

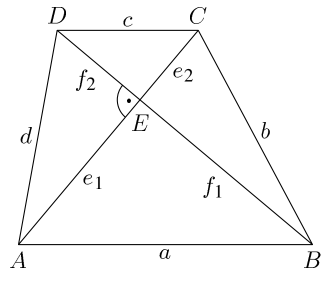
$$ac=SE\cdot ES'=d\cdot ES'.$$

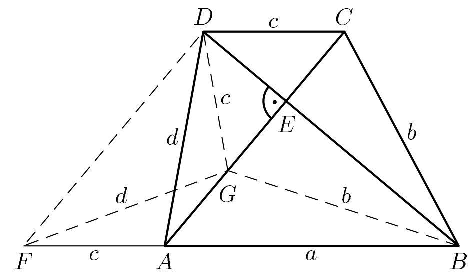
Azt kell tehát belátnunk, hogy $ES' \leq b$.

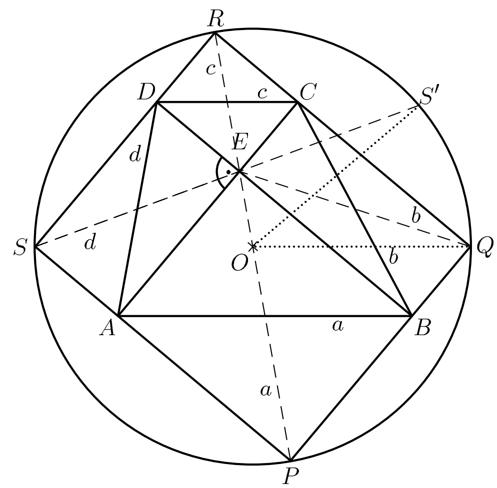
Feltehetjük, hogy $a \geq c$. Ekkor a kör O középpontja a PE szakaszra esik. A QOS' háromszög egyenlő szárú. Alapjának a felező merőlegese O-n megy keresztül, tehát az OR szakaszra eső E pontra

$$ES' \leq EQ=b,$$

és ezt kellett belátnunk. Ismét látható, hogy akkor áll fenn egyenlőség, ha O és E egybeesik, amikor is a trapéz rombusz.




D
c
C
c
E
d
b
d
G
b
F
c
A
a
B


R
c
D
c
C
S′
E
d
b
S
d
O
b
Q
A
a
B
a
P