A pontokat A-ból hozzájuk mutató helyvektoraikkal jellemezzük. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Ezek nem párhuzamosak, tehát a sík vektorai felírhatók egyértelműen ezek számszorosainak összegeként. Így

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} = \beta\mathbf{b} + \delta\mathbf{d}$$

alkalmas β, δ számokkal.

Mivel E az AB és a CD egyenesen van, F az AD és a BC egyenesen, így

$$\mathbf{e} = \overrightarrow{AE} = \varepsilon\mathbf{b} = \lambda\mathbf{d} + (1-\lambda)\mathbf{c} = (1-\lambda)\beta\mathbf{b} + ((1-\lambda)\delta + \lambda)\,\mathbf{d}, \mathbf{f} = \overrightarrow{AF} = \varphi\mathbf{d} = \mu\mathbf{b} + (1-\mu)\mathbf{c} = ((1-\mu)\beta + \mu)\,\mathbf{b} + (1-\mu)\delta\mathbf{d}.$$

Itt λ és μ nem lehet sem 0 sem 1, mert E különbözik C-től és D-től, F pedig B-től és C-től, különben A, C és D, illetőleg A, B és C egy egyenesen volna. Az előállítások egyértelműségéből következik, hogy

$$\varepsilon = (1-\lambda)\beta, \quad \delta = \frac{\lambda}{\lambda-1}, \quad \varphi = (1-\mu)\delta, \quad \beta = \frac{\mu}{\mu-1},$$

amiből

$$\varepsilon = \frac{(1-\lambda)\mu}{\mu-1}, \quad \varphi = \frac{\lambda(1-\mu)}{\lambda-1}.$$

Ezeket felhasználva

$$\mathbf{c} = \frac{\mu}{\mu-1}\mathbf{b} + \frac{\lambda}{\lambda-1}\mathbf{d}, \qquad \mathbf{e} = \frac{(1-\lambda)\mu}{\mu-1}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{f} = \frac{\lambda(1-\mu)}{\lambda-1}\mathbf{d}. \tag{1}$$

Egy $\mathbf{p}$ helyvektorú P pont akkor van az egyes körökön, ha a belőle a megfelelő átmérő végpontjaihoz mutató vektorok merőlegesek, azaz 0 a skaláris szorzatuk[3]. A feladatban szereplő körök ezért így jellemezhető

$$\mathbf{p}(\mathbf{p}-\mathbf{c}) = \mathbf{p}^2 - \frac{\mu}{\mu-1}\mathbf{pb} - \frac{\lambda}{\lambda-1}\mathbf{pd} = 0, (\mathbf{p}-\mathbf{b})(\mathbf{p}-\mathbf{d}) = \mathbf{p}^2 - \mathbf{pb} - \mathbf{pd} + \mathbf{bd} = 0, (\mathbf{p}-\mathbf{e})(\mathbf{p}-\mathbf{f}) = \mathbf{p}^2 - \frac{(1-\lambda)\mu}{\mu-1}\mathbf{pb} - \frac{\lambda(1-}{\lambda-}$$

Jelöljük a bal oldalakat K_{AC}, K_{BD}, K_{EF}-fel. A feladatot megoldottuk, ha sikerül olyan 0-tól különböző α, γ, η számokat találnunk, amelyekre azonosan teljesül, hogy

$$\alpha K_{AC} + \gamma K_{BD} + \eta K_{EF} = 0, \tag{2}$$

mert ekkor, ha egy P pontra valamelyik két kifejezés 0, akkor a harmadik is, tehát ha P valamelyik két körön rajta van, akkor a harmadikon is.

K_{AC}-ben nem szerepel $\mathbf{bd}$-s tag, így bármi is az α, a második kifejezés $\lambda\mu$-szöröséhez a harmadik -1-szeresét adva az összegben ilyen tag nem fog szerepelni. Az összeghez az első kifejezés $(1-\lambda\mu)$-szörösét adva $\mathbf{p}^2$ sem fog szerepelni az összegben. Tehát az $\alpha = 1-\lambda\mu$, $\gamma = \lambda\mu$, $\eta = -1$ választással a $\mathbf{p}^2$-es és a $\mathbf{bd}$-s tagok kiesnek, továbbá a $-\mathbf{bp}$ és a $-\mathbf{dp}$ együtthatója (2) bal oldalán

$$(1-\lambda\mu)\frac{\mu}{\mu-1} + \lambda\mu - (1-\lambda)\frac{\mu}{\mu-1} = \frac{\mu}{\mu-1}(1-\lambda\mu+\lambda(\mu-1)-1+\lambda) = 0;$$

illetőleg

$$(1-\lambda\mu)\frac{\lambda}{\lambda-1} + \lambda\mu - (1-\mu)\frac{\lambda}{\lambda-1} = \frac{\lambda}{\lambda-1}(1-\lambda\mu+\mu(\lambda-1)-1+\mu) = 0.$$

K_{AC} szorzója, $\alpha = 0$ lehetne, ha $\lambda\mu = 1$ volna, de ez sem lehetséges. Ha ugyanis ez állna fenn, akkor $\mathbf{c}$ (1)-beli előállításában a második törtet λ-val egyszerűsítve azt kapnánk, hogy

$$\mathbf{c} = \frac{\mu}{\mu-1}\mathbf{b} + \frac{1}{1-\mu}\mathbf{d} \qquad \text{vagy} \qquad \mathbf{d} = \mu\mathbf{b} + (1-\mu)\mathbf{c}).$$

Ez azt jelentené, hogy D egybeesnék E-vel, és így egy egyenesen lenne B-vel és C-vel a feladat feltételével ellentétben. Ezzel a feladat állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A feladatot vektorszámítással megoldó versenyzők többnyire azt számolták ki, hogy ha egy P pontra két egyenlet teljesül, akkor a harmadik is. Ekkor vagy három esetet kell külön-külön végigszámolni, vagy az igényel külön magyarázatot, hogy miért szimmetrikus a három kör szerepe.

2. A feladat megoldható projektív geometriai ismeretek alapján is[4]. Egy ilyen megoldásnak csak röviden vázoljuk a menetét. Ha R, S, T, U egy egyenes négy különböző pontja, akkor az RT/TS arányt, ezt pozitívnak tekintve, ha a két

[3] Vektorokra vonatkozóan lásd pl. Hajós Gy., Neukomm Gy,. Surányi J.: *Matematikai Versenytételek* II. rész (Tankönyvkiadó, Budapest, 1988) 37–47. old.; különösen e) pont, 43–44. old.

[4] A bizonyítás nélkül felhasználandó ismeretekre vonatkozóan Hajós Gy. *Bevezetés a geometriába* c. könyvére fogunk utalni (Tankönyvkiadó, Budapest, 1960). A projektív geometria egy minimális feltételekre alapozott (a távolság, szög, folytonosság fogalmát nem használó) felépítésére vonatkozóan lásd pl. a következő művet: H. S. M. Coxeter: *Projektív geometria*, Gondolat, Budapest, 1986.

szakasz egyirányú, negatívnak, ha ellentétes irányú, a három pont osztóviszonyának nevezzük, és (RST)-vel jelöljük. Az $(RST)/(RSU)$ arány a négy pont kettősviszonya, jelölése $(RSTU)$. Ez akkor negatív, ha az R, S és a T, U pontpár elválasztja egymást.

Ha a kettősviszony értéke -1, akkor azt mondjuk, hogy a négy pont harmonikus pontnégyes, illetőleg R, S és T, U harmonikusan választja el egymást[5].

A feladat betűzését használva jelöljük a BD és EF, EF és AC, illetőleg AC és BD metszéspontját rendre X, Y, Z-vel, ha létrejönnek (5. *ábra*). Ekkor A, C és Z, Y, továbbá D, B és X, Z, végül E, F és Y, X harmonikusan választja el egymást. Ha például $BEFD$ trapéz, akkor C felezi a rajta át a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső szakaszát, és így AC felezi a párhuzamos oldalakkal párhuzamosan húzott minden egyenesnek az AB és AD közé eső szakaszát, tehát BD-t és EF-et is[6] (6. *ábra*). Ezekből következik, hogy pl. az AC átmérőjű körben $AZ/AY = CZ/CY$, s így a kör az ehhez az arányhoz tartozó Apollóniosz-kör[7].

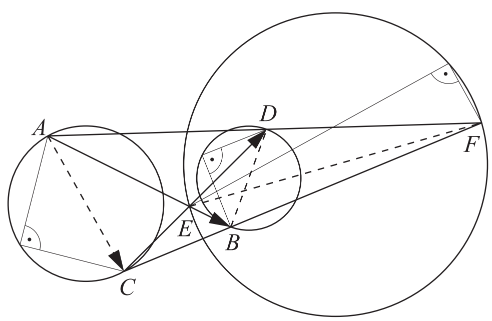
Ezután az XYZ háromszög oldalait a C, D, E pontokban metsző egyenesre Menelaos tételét alkalmazzuk[8]. Eszerint, a háromszög oldalegyeneseit a háromszög valamelyik irányú körbejárása szerint irányítva

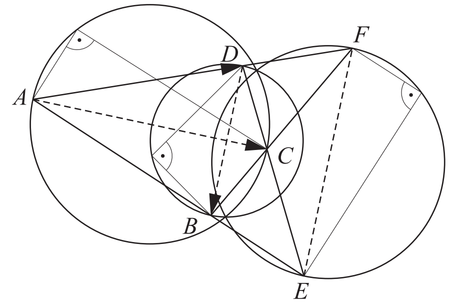
$$(YZC)(ZXD)(XYE) = -1.$$

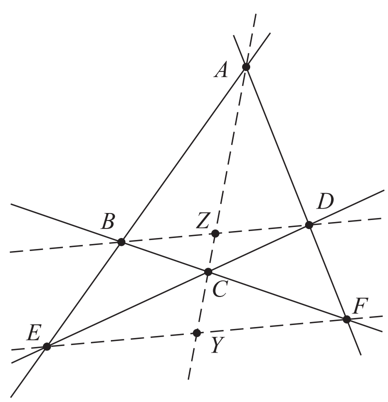
Ebből az adódik, hogy ha két kör metszi egymást, akkor a rájuk vonatkozó távolságarányok szorzata a harmadik körre vontkozó arányt adja, vagyis a metszésponton a harmadik kör is átmegy.

Ha pl. EF és BD párhuzamos, akkor Y az EF felezőpontja, Z a BD szakaszé, és hasonló háromszögek felhasználásával fejezhető be az előzőhöz hasonlóan a bizonyítás.

3. A feladat állítását tartalmazza H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer *Az újra felfedezett geometria* címen megjelent könyvének 2.4.7 tétele[9].







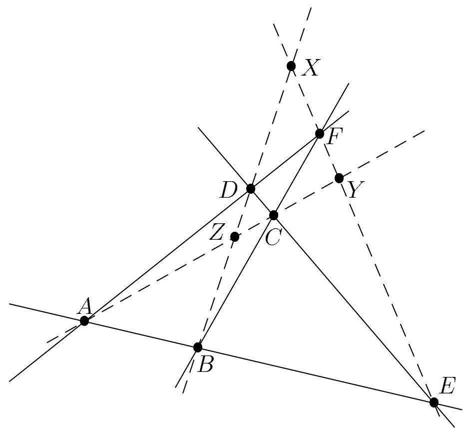
[5] Hajós idézett műve (a továbbiakban I. m.) 460. old.

[6] I. m. 462–463. old.

[7] I. m. 124. old.

[8] I. m. 357. old.

[9] Gondolat Kiadó, 1977., 70. old.


X
F
D
Y
Z
C
A
B
E