Előrebocsátunk egy megjegyzést. Elég olyan polinomokra szorítkozni, amelyekben minden változó legfeljebb első hatványon szerepel. Ha ugyanis minden páros hatványon szereplő változót 1-gyel, a páratlan hatványon szereplőket pedig a változó első hatványával helyettesítjük, ezzel a polinom foka nem növekszik, a feladatban megadott tulajdonsága pedig nyilvánvalóan megmarad, és ezen az sem változtat, ha a módosítás után összevonható tagokat összevonjuk. Ha pedig a módosított polinom legalább n-edfokú, akkor az eredeti is. A továbbiakban polinomon mindig a mondott módon egyszerűsített polinomot értünk[2].

I. megoldás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Egy egyváltozós polinom $ax+b$ alakú. Feltétel szerint

$$a+b>0, \qquad -a+b<0, \quad \text{azaz} \quad a-b>0,$$

tehát

$$2a>0, \qquad a>0.$$

A polinom tehát elsőfokú. (Az eredeti polinom legalább elsőfokú.)

Tegyük fel, hogy a legfeljebb m változós polinomokra igaz a feladat állítása. Egy $m+1$ változós polinom

$$f_1(x_1,\ldots,x_m)+x_{m+1}f_2(x_1,\ldots,x_m)$$

alakban írható, ahol f_1 és f_2 legfeljebb m-változós polinom. Legyen $c_1, \ldots, c_m$ egy $+1$-ekből és -1-ekből álló sorozat. Ha a c_i-k közt páros számú -1 van, akkor x_{m+1}-nek egyszer $+1$, egyszer -1 értéket adva, a feltétel szerint

$$f_1(c_1,\ldots,c_m)+f_2(c_1,\ldots,c_m)>0 \qquad f_1(c_1,\ldots,c_m)-f_2(c_1,\ldots,c_m)<0.$$

Az utóbbit így írhatjuk:

$$-f_1(c_1,\ldots,c_m)+f_2(c_1,\ldots,c_m)>0 \quad \text{és így} \quad 2f_2(c_1,\ldots,c_m)>0;$$

ha pedig a c_i-k között a -1-ek száma páratlan, akkor

$$f_1(c_1,\ldots,c_m)+f_2(c_1,\ldots,c_m)<0, \qquad f_1(c_1,\ldots,c_m)-f_2(c_1,\ldots,c_m)>0,$$

tehát

$$-f_1(c_1,\ldots,c_m)+f_2(c_1,\ldots,c_m)<0 \quad \text{és így} \quad 2f_2(c_1,\ldots,c_m)<0.$$

Azt kaptuk, hogy f_2-nek is megvan a tételben megfogalmazott tulajdonsága, s így az indukciós feltétel szerint legalább m-edfokú, az eredeti polinom legalább $(m+1)$-edfokú. Ezzel beláttuk, hogy a tétel állítása minden n-re igaz.

II. megoldás. Indirekt úton bizonyítjuk a feladat állítását. Az, hogy egy polinom n-nél alacsonyabb fokú, azt jelenti, hogy nincs benne mindegyik változót tartalmazó tag. Tegyük fel, hogy egy ilyen polinomra teljesülnének a feladat feltételei. Képezzük az összes $+1$-ekből és -1-ekből álló sorozatokon vett értékeit a polinomnak, és a pozitív értékek U összegéből vonjuk le a negatív értékek V összegét. Nyilvánvalóan $U-V>0$. Nézzük meg, hogy egy $ax_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_j}$ tag együtthatója ($j<n$) hányszor szerepel U-ban és hányszor V-ben. A $+1$-ekből és -1-ekből álló c_1, $c_2, \ldots, c_n$ sorozatokban, rögzítve $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_j}$ értékét, ha

$$c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_j}=1,$$

akkor a annyiszor szerepel U-ban, ahányféleképpen a többi c-k közt páros számú -1 fordulhat elő. Ez a szám

$$r=\binom{n-j}{0}+\binom{n-j}{2}+\binom{n-j}{4}+\ldots,$$

ahol az összeg addig tart, amíg az alsó páros szám nem nagyobb $(n-j)$-nél; V-ben pedig annyiszor, ahányféleképpen a többi c-k közül páratlan számút lehet kiválasztani. Ez a szám pedig

$$s=\binom{n-j}{1}+\binom{n-j}{3}+\binom{n-j}{5}+\ldots .$$

A kiszemelt tag adaléka az $U-V$ különbséghez tehát a binomiális tétel szerint

$$a(r-s)=a\left\{\binom{n-j}{0}-\binom{n-j}{1}+\binom{n-j}{2}-\binom{n-j}{3}+\ldots\right\}=a(1-1)^{n-j}=0.$$

Ha viszont

$$c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_j}=-1,$$

akkor $-a$ szerepel U-ban s-szer, V-ben pedig r-szer, így ekkor is 0 a tag adaléka az $U-V$ különbséghez. Mivel ez az indirekt feltevés szerint a polinom minden tagjára teljesülne, így ellentmondásra jutottunk azzal, hogy ez a különbség pozitív. A polinomban tehát szerepelnie kell az $x_1x_2\ldots x_n$ tagnak nemnulla együtthatóval. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

[2]Elmondhatók volnának megoldásaink enélkül az egyszerűsítés nélkül is, csak a szöveg válnék sokkal bonyolultatbbá.