A következő állítást fogjuk bizonyítani:

Ha az L_1, L_2, $\ldots$, L_m halmaz mindegyike a számegyenes legalább m (de véges számú) páronként közös elem nélküli intervallumából áll, akkor kiválasztható mindegyik halmazból egy-egy intervallum úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja.

Ez tartalmazza a feladat állítását. Ehhez csak $n = 2m-1$ és $n = 2m$ esetén a H_m, H_{m+1}, $\ldots$, H_{2m-1} halmazokra kell alkalmazni a kimondott tételt.

Az állítás igaz, ha $m = 1$. Ha $m > 1$, eljárást adunk meg az intervallumok egymás utáni kiválasztására. Vegyük mindegyik halmaz balról első intervallumának a jobb végpontját és azt vagy azokat az intervallumokat, amelyekre ez a legkisebb. Több intervallum esetén válasszunk ki egy jobbról nyitottat, ha van ilyen, különben tetszés szerint egyet. Legyen ez I_1, és tartozzék az L_i halmazhoz. Ezután hagyjuk el L_i-t, a többi halmazból pedig a balról első intervallumot, majd ismételjük az eljárást, amíg el nem fogynak a halmazok.

Az első lépés után $m-1$ halmaz marad, mindegyik legalább $m-1$ páronként közös pont nélküli intervallumból áll. Azt kell még belátnunk, hogy I_1-nek a megmaradt intervallumok egyikével sincs közös pontja. Ezzel egyenértékű az, hogy ha I_1-nek az eredeti L_j halmaz I' intervallumával van közös pontja, ahol $j \neq i$, akkor I' az L_j balról első intervalluma.

Jelöljük I' bal végpontját b-vel, és tegyük fel, hogy van L_j-ben egy I'-től balra levő I'' intervallum. Ha b kisebb I_1 jobb végpontjánál, akkor ez még inkább igaz I'' jobb végpontjára (*8.a ábra*; a halmazokat párhuzamosan eltolt egyeneseken szemléltetjük), így nem I_1-et kellett volna kiválasztanunk.

Ha b egyenlő I_1 jobb végpontjával, akkor kell, hogy I' balról, I_1 jobbról zárt legyen. Ekkor I'' jobb végpontja vagy kisebb b-nél, vagy egyenlő vele, de az utóbbi esetben az intervallum nyitott, mert nincs közös pontja I'-vel (*8.b ábra*). Ismét egyik esetben sem I_1-et kellett volna kiválasztani eljárásunk szerint. Ezzel bebizonyítottuk az állítást.

Ezek alapján az eljárást m-szer megismételve az összes követelményt kielégítő intervallumhalmazt kapunk.

Megjegyzés. Többen tettek kísérletet annak bizonyítására, hogy a feladat állításában az $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ korlát nem javítható, de ezek hibásak. Az $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ élességét csupán $n \leq 6$-ra sikerült eddig belátni. Annyit azonban meg lehet mutatni, hogy van olyan halmazrendszer, amelyikből csak $\left(1-\dfrac{1}{e}\right)(n+1)$-nél kevesebb intervallum választható ki a feladat követelményeinek megfelelően.

Álljon $k = 1, 2, \ldots, n$-re H_k a

$$(0, 1/k),\ (1/k, 2/k),\ \ldots,\ ((k-1)/k, 1)$$

nyitott intervallumokból. Legyen a kívánalmaknak megfelelően kiválasztható intervallumok maximális száma j. A kiválasztott intervallumok hosszának az összege nem lehet 1-nél nagyobb. Ha minden lépésben kiválaszthatunk egyet a megmaradt legrövidebb intervallumok közül, ez az összeg akkor is legalább

$$S = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-j+1} =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{1-1/n} + \frac{1}{1-2/n} + \cdots + \frac{1}{1-(j-1)/n}\right).$$

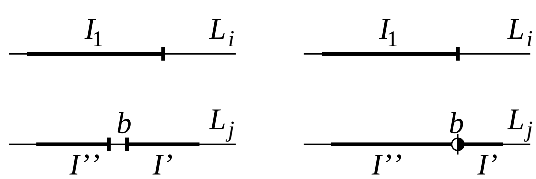
Integrálva $\dfrac{1}{1-x}$-et $-\dfrac{1}{n}$-től $\dfrac{j-1}{n}$-ig, S tekinthető az integrál egy felső közelítő összegének (*9. ábra*), s így az integrálnak 1-nél kisebbnek kell lennie, azaz

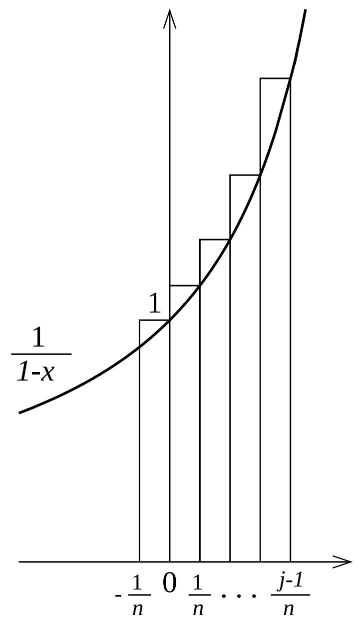
$$\log\left(\frac{n+1}{n-j+1}\right) < 1, \qquad j < \left(1-\frac{1}{e}\right)(n+1).$$

Ez tehát felső korlát a kiválasztható intervallumok számára. A nyert konstans:

$$1 - \frac{1}{e} = 0{,}63212\ldots$$

A megjegyzés Surányi Lászlótól származik.





$\frac{1}{1-x}$
1
$-\frac{1}{n}$
0
$\frac{1}{n}$
. . .
$\frac{j-1}{n}$