I. megoldás. Tekintsünk egy $ABCD$ paralelogrammát, amelyikben AB és BC hossza a, illetőleg λa ($\lambda > 1$), az átlók metszéspontja és a BC oldal felezőpontja E, illetőleg F. Ekkor E egyben az átlók közös felezőpontja is, így EF az AB-vel párhuzamos középvonal fele, hossza $\frac{1}{2}a$. A szóba jövő E pontok tehát az F középpontú, $\frac{1}{2}a$ sugarú k_E kör pontjai, kivéve a BC egyenessel való két metszéspontot, amelyek a kör átellenes pontjai. Szimmetria okokból elég a BC egyenes egyik oldalán levő félkört vizsgálni (*1. ábra*).

A kör átmérője a BC szakasz része. Az átlók szöge a BC szakasz látószöge E-ből, tehát tompaszög (hiszen az átmérő látószöge derékszög). Ennek az α szögnek a lehető legkisebb értékét kell tehát meghatároznunk.

Belátjuk, hogy α értéke a félkör E_0 felezőpontjára a legkisebb. A BCE_0 háromszög köré írt k_0 kört belülről érinti k_E, mert mindkét kör középpontja a BC-re F-ben emelt merőlegesen van, és k_E átmérője a BC szakasz része. A DE és k_0 metszéspontját G-vel jelölve

$$CEB\sphericalangle = CGB\sphericalangle + GCE\sphericalangle > CGB\sphericalangle = CE_0B\sphericalangle,$$

amint állítottuk.

A keresett legnagyobb hegyesszög, φ_0 ennek a szögnek mellékszöge, és mivel a BCE_0 háromszög egyenlő szárú, az $E_0BF\sphericalangle$ kétszeresével egyenlő, tehát például így fejezhető ki λ-val a BE_0F derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{BF}{E_0F} = \frac{\frac{1}{2}\lambda a}{\frac{1}{2}a} = \lambda, \quad \text{azaz} \quad \varphi_0 = 2\text{arc ctg}\,\lambda,$$

ahol az arkusz-függvény 0° és 90° közé eső értékét kell venni.

Megjegyzés. A feladat szövege feltételezte ugyan, de meggondolásaink során bizonyítást is nyert, hogy ezt a maximális értéket fel is veszi az átlók szöge, és azt is beláttuk, hogy a téglalapban a legnagyobb ez a szög.

II. megoldás. Válasszuk mértékegységnek az AB oldal hosszát, ekkor BC hossza λ. Jelöljük az átlók metszéspontját (ami közös felezőpontjuk is) E-vel, AE és EB hosszát e-vel, illetőleg f-fel, a köztük levő szöget φ-vel (*2. ábra*).

A koszinusztételt alkalmazzuk az AEB és a BEC háromszögre.

$$1 = e^2 + f^2 - 2ef\cos\varphi, \lambda^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos(180^\circ - \varphi) = e^2 + f^2 + 2ef\cos\varphi.$$

A megfelelő oldalak összegét és különbségét képezve

$$\lambda^2 + 1 = 2(e^2 + f^2), \qquad \lambda^2 - 1 = 4ef\cos\varphi.$$

A második egyenlőség bal oldala pozitív, így $\cos\varphi$ pozitív, φ tehát hegyesszög.

Alkalmazzuk a második egyenlőségben e^2-re és f^2-re a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget, és használjuk fel az első egyenlőtlenséget:

$$\lambda^2 - 1 \le 4\left(\frac{e^2 + f^2}{2}\right)\cos\varphi = (\lambda^2 + 1)\cos\varphi.$$

Innen

$$\cos\varphi \ge \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1},$$

és akkor áll fenn egyenlőség, ha $e = f$, azaz ha a paralelogramma téglalap. Mivel a koszinusz-függvény a $(0^\circ; 90^\circ)$ számközben a változó csökkenő függvénye, így a keresett legnagyobb φ_0 szögre

$$\cos\varphi_0 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}, \qquad \varphi_0 = \text{arc cos}\,\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1},$$

ahol a függvény 0° és 90° közé eső értékét kell venni.

Megjegyzés. A

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2)} = \frac{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2) - 1}{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2) + 1}$$

azonosság alapján világos, hogy az eredmény megegyezik az előző megoldásban nyerttel.

III. megoldás. Az AC átlót rögzítve azok a D pontok, amelyekre az AD/CD arány egy rögzített (1-nél nagyobb) λ érték, egy kört alkotnak, az AC szakaszhoz és λ arányhoz tartozó Apolloniosz-kört. Jelöljük ezt k_λ-val, AC felezőpontját E-vel, k_λ középpontját O-val.

Az AC és ED átlók közti szög akkor a legnagyobb, ha D az E pontból a k körhöz húzott érintő D_0 érintési pontja. Jelöljük ezt a legnagyobb szöget φ_0-val, k_λ-nak az AC-re eső átellenes pontjait P-vel és Q-val, az AC szakasz felét e-vel (*3. ábra*). P és Q ezt a szakaszt belülről, illetőleg kívülről $\lambda : 1$ arányban osztó pont, így

$$\lambda = \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QC}.$$

A szereplő szakaszokat e-vel fejezve ki a két törtben

$$\lambda = \frac{e+EP}{e-EP} = \frac{EQ+e}{EQ-e}. \tag{1}$$

A második egyenlőségből a törtek eltávolítása és rendezés után az

$$e^2 = EP \cdot EQ \tag{2}$$

egyenlőséget kapjuk. (1)-ből

$$EP = \frac{(\lambda-1)e}{\lambda+1}, \qquad EQ = \frac{(\lambda+1)e}{\lambda-1}.$$

A (2) egyenlőség jobb oldalán álló szorzat az E pontnak a k_λ körre vonatkozó hatványa, így az egyenlőség azt jelenti, hogy az E pontból a k_λ körhöz húzott érintő hossza $ED_0 = e$. A φ_0 szög meghatározásakor az OED_0 háromszög OD_0 oldalát, vagyis a k_λ kör r sugarát fejezzük ki e-vel és λ-val.

$$r = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}(EQ-EP) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} - \frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)e = \frac{2\lambda e}{\lambda^2-1}.$$

Az EOD_0 derékszögű háromszögből tehát

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{r}{e} = \frac{2\lambda}{\lambda^2-1}, \qquad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\lambda}{\lambda^2-1},$$

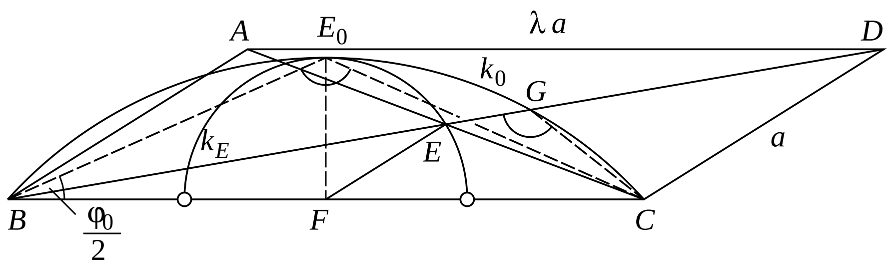
ahol a 0° és 90° közé eső értékeket kell venni.

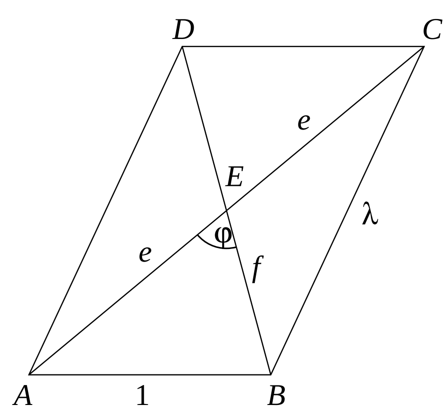
Megjegyzések. 1. Az előző megoldásokkal való kapcsolat könnyen adódik például a

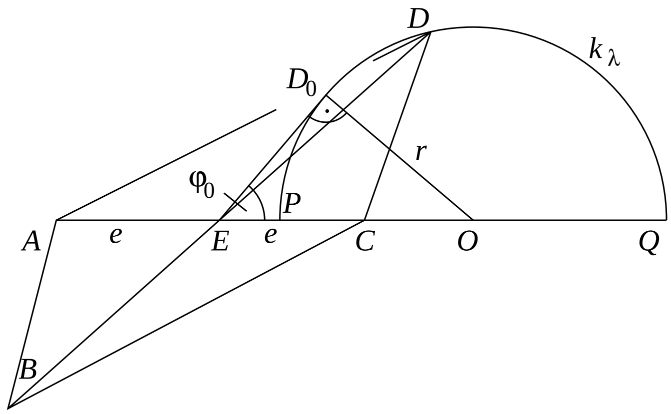
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}$$

összefüggésből.

2. Az $ED_0 = e$ egyenlőség szerint D_0 az AC átmérőjű körön van, így az ACD_0 háromszög derékszögű, vagyis az a paralelogramma, amelyikre az átlók szöge a legnagyobb, a téglalap.







D
D_0
k_λ
r
φ_0
P
A
e
E
e
C
O
Q
B