I. megoldás. A polinom így alakítható át:

$$\left(x^n+x^{n-1}\right)^2+2\left(x^{n-1}+x^{n-2}\right)^2+\dots+(n-k)\left(x^{k+1}+x^k\right)^2+\dots+n(x+1)^2+n+1=$$
$$=(x+1)^2\left(x^{2n-2}+2x^{2n-4}+\dots+(n-k)x^{2k}+\dots+(n-1)x^2+n\right)+n+1.$$

Az első alakban x^{2k+1} csak a kiírt tagból keletkezik, együtthatója $2(n-k)$; x^{2k} pedig a kiírt tagból és az azt követőből adódik, ha $k\geq 1$, együtthatója tehát $n-k+n+1-k=2n+1-2k$. Végül a konstans tag $n+n+1=2n+1$. Valóban az f polinomot írtuk tehát át más alakra. A második átalakítás helyessége nyilvánvaló.

A nyert alakból látható, hogy $f(-1)=n+1$, és más helyen f értéke ennél nagyobb. A keresett minimum tehát $n+1$ és ezt a -1 helyen veszi fel a polinom.

II. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a polinom értéke a -1 helyen $n+1$, másutt ennél nagyobb. Jelöljük a polinomot f_n-nel.

$$f_1(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2,$$

amiből világos, hogy $n=1$-re helyes az állítás.

Tegyük fel, hogy n-nek egy $k-1$ értékére igaz az állítás. A nyilvánvaló

$$f_k(x)=f_{k-1}(x)x^2+2kx+2k+1=(f_{k-1}(x)-k)x^2+k(x+1)^2+k+1$$

alakból azt kapjuk, hogy $f_k(-1)=k+1$, és minden más helyen a jobb oldal második tagja, továbbá a feltevés szerint az első is pozitív.

Az állítás helyessége tehát öröklődik $k-1$-ről k-ra. Így minden n-re igaz az állítás.

Megjegyzés. Végezhetjük az indukciós bizonyítást az

$$f_n(x)=f_{n-1}(x)+x^{2n}+2x^{2n-1}+2\left(x^{2n-2}+x^{2n-3}+\dots+x+1\right)=$$
$$=f_{n-1}(x)+1+x^{2n}-1+2\left(\left(x^{2n-1}+x^{2n-2}\right)+\left(x^{2n-3}+x^{2n-4}\right)+\dots+(x+1)\right)=$$
$$=f_{n-1}(x)+1+(x+1)((x-1)+2)\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\dots+x^2+1\right)=$$
$$f_{n-1}(x)+1+(x+1)^2\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\dots+x^2+1\right)$$

átalakítás alapján is.

III. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot differenciálhányados segítségével is. Világos, hogy nemnegatív x értékekre a polinom pozitív, és x növekedtével nő. Negatív x értékekre egy más alakban írjuk a polinomot.

$$xf(x)-f(x)=x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}+\dots+x-2n-1=\frac{x^{2n+2}-1}{x-1}-(2n+2).$$

Innen pedig

$$f(x)=\frac{x^{2n+2}-(2n+2)x+2n+1}{(x-1)^2}.$$

A deriváltat mint a számláló és az $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ függvény szorzatáét határozzuk meg:

$$f'(x)=\frac{(2n+2)x^{2n+1}-(2n+2)}{(x-1)^2}-\frac{2x^{2n+2}-(2n+2)x+2n+1}{(x-1)^3}=$$
$$=\frac{2n\left(x^{2n+2}-1\right)-(2n+2)\left(x^{2n+1}-x\right)}{(x-1)^3}=$$
$$=2(x+1)\frac{n\left(x^{2n}+x^{2n-2}+\dots+x^2+1\right)-(n+1)x\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\dots+x^2+1\right)}{(x-1)^2}.$$

Itt negatív x-re a számláló mind a két tagja és a nevező is pozitív, az $x+1$ tényező pedig a -1 helyen negatívból pozitívba megy át. A függvény tehát minimumát az $x=-1$ helyen veszi fel. A minimum értéke (pl. az f(x) utolsó alakjából számolva) n+1.