I. megoldás. Az ALM háromszög egyenlő szárú. Így, ha AB és AC különböző, akkor a B-ből és a C-ből LM-mel párhuzamosan húzott egyenes is különböző. A velük nem párhuzamos KM egyenes metszi őket, így a D és E pont létrejön (*1. ábra*).

Jelöljük BD és AC metszéspontját B'-vel, CE és AB metszéspontját C'-vel. Ekkor egyenlőszárú az ALM-hez hasonló $AB'B$ és az ACC' háromszög is. B'-n és C'-n át párhuzamost húzunk a BC oldallal. Az előbbi és KL metszéspontját G-vel, az utóbbi és KM metszéspontját H-val jelölve a BDK és a $B'DG$ háromszög egybevágó, mert megfelelő szögeik csúcsszögek vagy váltószögek. Belátjuk továbbá, hogy $B'G = BK$. Ugyanis a $GB'L$ és KCL háromszög hasonló, és az utóbbi két oldala a C-ből a beírt körhöz húzott két érintőszakasz, ezért $B'G = B'L$. Utóbbi és BM viszont egyenlő szakaszok különbsége, így szintén egyenlők. Végül BM és BK a B-ből húzott két érintőszakasz, így egyenlők. Ekkor azonban a többi oldalpár is egyenlő, így $BD = B'D$, vagyis D a BB' szakasz felezőpontja.

Ugyanígy látjuk be, hogy E a CC' szakasz felezőpontja. A CKE és a $C'HE$ háromszög egybevágó, miután megfelelő szögeik csúcsszögek vagy váltószögek, továbbá egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlő volta következtében a KBM háromszöghöz hasonló $HC'M$ háromszög egyenlő szárú, s így $HC' = C'M = CL = CK$. Ekkor a háromszög többi oldalpárja is egyenlő, így $CE = C'E$.

Ezekből már következik, hogy a DE egyenes a $BAC\sphericalangle$ szárai közti harmadik párhuzamos szakaszt, KM-et is felezi, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzések. 1. Világos, hogy ez az egyenes az A csúcsból induló szögfelező.

2. Mint többen is megjegyezték, a bizonyításban csak az AB és AC oldal különböző voltára volt szükség.

3. Könnyen látható, akár ennek, akár a következő megoldásoknak a gondolatmenetével, hogy helyes marad az állítás akkor is, ha a beírt kört a háromszög egyik oldalát kívülről érintő körrel helyettesítjük. Az AB vagy az AC oldalhoz hozzáírt kör esetén D és E a külső szögfelezőn lesz.

A versenyzők sok különböző megoldást adtak a feladatra. Sokan használták fel Menelaos tételét, illetőleg annak a megfordítását. Volt, aki koordinátákkal számolt. A fenti megoldás mindegyiknél sokkal egyszerűbb. Miután azonban ez a megoldás csak egyetlen versenyzőnél szerepelt, bemutatunk még két további megoldást.

II. megoldás. Válasszuk a jelölést úgy, hogy $AB < AC$ teljesüljön. Ekkor D a KL szakaszon van, E az MK szakasz K-n túli meghosszabbításán. Jelöljük a háromszögbe írt kört k-val.

Azt mutatjuk meg, hogy D és E az LM szakasz felező merőlegesén van, vagyis hogy DLM és az ELM háromszög egyenlő szárú, mivel L-nél és M-nél levő szögeik egyenlők (*2. ábra*).

Az AML, BKM és CLK háromszög egyenlő szárú, mert két-két oldaluk a csúcsokból k-hoz húzott érintőszakasz. Az alapon levő szögeiket jelöljük α, β, illetőleg γ-val. Ezek egyenlők a KLM háromszög K-nál, L-nél, illetőleg M-nél levő szögével, mert k-nak ugyanazt az ívét tartalmazó húr-érintő szögek, illetőleg kerületi szögek. Így összegük $180°$.

B, K, D és M egy k_1 körön van, mert az $LKM\sphericalangle, LMA\sphericalangle$, és $DBM\sphericalangle$ egyenlő és egyező irányítású. Az első és a második azért, mert az első kerületi szög, a második húr-érintő szög k-ban, és az első száruktól a másodikig a kör ugyanazon irányított íve fut; a második és a harmadik szög szárai pedig egyirányban párhuzamosak. Így a két szög csúcsa és a megfelelő szárak egyeneseinek a metszéspontja egy körön van.

Ekkor $BMD\sphericalangle = CKL\sphericalangle = \gamma$, mert a száregyeneseik közti (csúcs-) szögtartomány egyaránt k_1 B-től K-n át D-ig futó ívét tartalmazza. Ennek folytán

$$LMD\sphericalangle = 180° - BMD\sphericalangle - LMA\sphericalangle = 180° - \gamma - \alpha = \beta = MLD\sphericalangle,$$

tehát LDM egyenlő szárú háromszög.

Hasonlóan C, K, E és L is egy k_2 körön van, mert $LKM\sphericalangle, ALM\sphericalangle$ és $ACE\sphericalangle$ egyenlő és egyező irányítású ugyanolyan okokból, mint az előbb.

Ekkor $ELC\sphericalangle = EKC\sphericalangle = MKB\sphericalangle = \beta$, mert az első és a második k_2 ugyanazon ívét tartalmazó kerületi szög k_2-ben, a második és a harmadik pedig csúcsszög-pár. Így

$$MLE\sphericalangle = 180° - ALM\sphericalangle - ELC\sphericalangle = 180° - \alpha - \beta = \gamma = EML\sphericalangle,$$

tehát az ELM háromszög is egyenlő szárú. Eszerint az LM szakasz felező merőlegese átmegy D-n is, E-n is, vagyis D, E és LM felezőpontja egy egyenesen van a feladat állításának megfelelően.

Megjegyzés. Miután beláttuk, hogy B, K, D és M, továbbá C, K, E és L egy körön van, befejezhetjük a bizonyítást így is: A BD-re D-ben, a BK-ra K-ban és a BM-re M-ben emelt merőleges egy ponton megy át, a k_1 kör B-vel átellenes pontján. Ez a pont azonban a háromszögbe írt kör O középpontja, mert a K-ban és az M-ben emelt merőleges ennek a körnek a sugara (*3. ábra*).

Hasonlóan a CE-re E-ben, a CK-ra K-ban és a CL-re L-ben emelt merőleges a k_2 kör C-vel szemben fekvő pontján megy keresztül, ami ismét O. Az LM húr F felezőpontjában emelt merőleges ugyancsak átmegy O-n. Mivel BD és CE párhuzamos LM-mel, így D, E és F egy egyenesen van.

III. megoldás. Feltesszük, hogy $AB < AC$. Jelöljük a CE és AB egyenes metszéspontját C'-vel, DE és LM metszéspontját F-fel, BD és MK metszéspontját G-vel (*4.ábra*). Azt kell megmutatnunk, hogy F az LM szakasz felezőpontja.

Menelaos tételét használjuk fel. A DE egyenes nem megy át a KLM háromszög egyik csúcsán sem, így az említett tétel szerint

$$\frac{ME \cdot KD \cdot LF}{EK \cdot DL \cdot FM} = -1.$$

Itt, tetszés szerint rögzítve az egyes egyeneseken egy irányítást, a szakaszok előjelesen értendők. Azt mutatjuk meg, hogy

$$\frac{ME \cdot KD}{EK \cdot DL} = -1. \tag{1}$$

DG és ML párhuzamos, így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{KD}{DL} = \frac{KG}{GM},$$

így (1) bal oldala helyett

$$\frac{ME \cdot KG}{EK \cdot GM} \tag{2}$$

írható. GB és EC' párhuzamos, tehát az EMC' szög száraira alkalmazva a párhuzamos szelők tételét

$$\frac{ME}{GM} = \frac{MC'}{BM}.$$

A CKE és a BKG háromszög hasonló, mert megfelelő szögeik egyenlők. Miután az A-ból, a B-ből és a C-ből az ABC háromszögbe írt körhöz húzott érintők egyenlők, továbbá $MC' = LC$, mert egyenlő szakaszok különbségei, így

$$\frac{KG}{EK} = \frac{KB}{CK} = \frac{MB}{LC} = \frac{MB}{MC'}.$$

Az előjel is helyes, mert az első arányban és az utolsóban is egyirányú szakaszok szerepelnek. Mindezek alapján

$$\frac{ME \cdot KD}{EK \cdot DL} = \frac{ME \cdot KG}{EK \cdot GM} = \frac{MC' \cdot MB}{BM \cdot MC'} = -1,$$

amit állítottunk.