I. megoldás. Tegyük fel, hogy az n egész, és x és y pozitív egész számokra teljesül, hogy

$$(1)\qquad an^2+b=x^2, \qquad \text{és} \qquad a(n+1)^2+b=y^2.$$

A megfelelő oldalak különbségét képezve és az n-et tartalmazó tagot kifejezve

$$2an=y^2-x^2-a.$$

Ezt az első egyenlőség $4a$-szorosába helyettesítve és rendezve a következőt kapjuk:

$$x^4-2x^2y^2+y^4-2a(x^2+y^2)+a^2+4ab=0.$$

Mind a két oldalhoz $4x^2y^2$-et hozzáadva a bal oldalon az utolsó tag kivételével teljes négyzet keletkezik. Ezt mind a két oldalból levonva a jobb oldal szorzattá alakítható:

$$4ab=(2xy-x^2-y^2+a)(2xy+x^2+y^2-a).$$

A bal oldal egy felbontását kaptuk tehát két egész tényező szorzatára. A kínálkozó teljes négyzetté alakításokkal

$$a-(x-y)^2=q_1, \quad (x+y)^2-a=q_2, \quad \text{ahol} \quad q_1q_2=4ab.$$

Innen kiszámítható x és y. Ha ezek egész számnak adódnak, akkor pl. az (1) első egyenlőségéből n-re legfeljebb két egész értéket kapunk. A feladat követelményeit tehát legfeljebb négyszer annyi n érték elégíti ki, mint ahányféleképpen $4ab$ két tényező szorzatára bontható, tehát valóban véges sok.

Megjegyzések. 1. Könnyű olyan polinomot találni, amelyikhez van a feltételeket kielégítő n érték. A $3n^2+1$ polinom értéke például a 0 és 1 helyen 1, ill. 4.

2. Nem lényeges a és b pozitív volta, csak az, hogy egyik sem 0, hiszen okoskodásunk akkor is helyes marad, ha a $4ab$ szorzat negatív, és ha a felbontásnál negatív tényezőket is megengednünk.

A feladat állítása érvényes ennél is általánosabban minden egész együtthatós ax^2+bx+c másodfokú polinomra, amelyik nem elsőfokúnak a négyzete. Az elsőfokú tag elhagyása csak a számolási bonyodalmak csökkentését szolgálta. Valóban, ha ennek a polinomnak az értéke az n helyen is, az $n+1$ helyen is négyzetszám, akkor a fentihez hasonlóan számolva

$$2an+a+b=y^2-x^2.$$

Innen $2an$-et a

$$4a^2n^2+4abn+4ac=4ax^2$$

egyenlőségbe helyettesítve megfelelő átrendezés után az

$$y^4-2x^2y^2+x^4-2a(x^2+y^2)+a^2+4ac-b^2=0$$

egyenlőséghez jutunk. Az, hogy a polinom nem elsőfokú négyzete, azt jelenti, hogy $4ac-b^2\neq 0$, és így innen már ugyanúgy okoskodhatunk tovább, mint a fenti megoldásban.

3. A lehetséges n értékek számára nyerhetnénk kisebb korlátot, de a célunk csak ilyen korlát létezésének a bizonyítása volt.

II. megoldás. Az bizonyítjuk, hogy a feladat állítása igaz minden 0-tól különböző a,b egészre. Ha $a<0$, akkor an^2+b negatív, amint n^2 elég nagy, $\left(n^2>\dfrac{b}{-a}\right)$, tehát legfeljebb véges sok egész n-re lehet négyzetszám az értéke. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, ha $a>0$.

Az (1) alatti két egyenlőség bal oldalának a szorzata

$$a^2n^2(n+1)^2+2ab(n^2+n)+ab+b^2=(an(n+1)+b^2)+ab.$$

Ez feltétel szerint négyszetszám. Ez nem lehetséges akkor, ha $b>0$ esetén a jobb oldal kisebb, mint $(an(n+1)+b+1)^2$, illetve ha $b<0$ esetén nagyobb, mint $(an(n+1)+b-1)^2$. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel mind a két esetben teljesül, amint n elég nagy.

Ha $b>0$, akkor a feltétel

$$2an^2+2an+2b+1-ab>0$$

alakra hozható. Ekvivalens egyenlőtlenségre jutunk, ha mind a két oldalt megszorozzuk pozitív $2a$ számmal. Ekkor megfelelő átalakításokkal a

$$(2an+a)^2>2a^2b+a^2-4ab-2a$$

egyenlőtlenségre jutunk, ez pedig minden elég nagy abszolútértékű n-re teljesül, mivel a jobb oldal nem függ n-től.

Ha $b<0$, akkor

$$2an^2+2an+2b-1+ab>0$$

alakra hozható a feltétel és ez ismét minden elég nagy abszolútértékű n-re teljesül.

Megjegyzés. Ez a megoldás is alkalmazható lényes változtatás nélkül tetszés szerinti másodfokú polinomra, amelyik nem elsőfokú négyzete, csak lényegesen többet kell számolni.

III. megoldás. Ismét az előző megoldásban nyert állítást bizonyítjuk, de mint ott, most is elég azt az esetet vizsgálni, ha $a > 0$.

Feltehetjük azt is, hogy $n \geq 0$, mert n-nel együtt $-n-1$ is kielégíti a feltételeket, és a kettő közül az egyik nem negatív.

Tegyük fel, hogy

$$an^2 + b = r^2, \quad a(n+1)^2 + b = (r+s)^2.$$

valamilyen pozitív egész r és s számmal. Ekkor

$$(2n+1)a = 2rs + s^2 > 2rs.$$

Pozitív egész számokról lévén szó, ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(2n+1)^2a^2 > 4r^2s^2 = 4(an^2+b)s^2.$$

Innen, mivel $an^2 + b$ pozitív négyzetszám,

$$s^2 < \frac{(2n+1)^2a^2}{4an^2+4b} \leq \frac{(2a+a/n)^2}{4a-4|b|/n^2} \leq \frac{(2a+1)^2}{4a-4},$$

ha n nagyobb a-nál is, $\sqrt{|b|}$-nél is. Így s az ezen határ fölötti n-ekre csak véges sok különböző értéket vehet fel.

Minden ilyen s-re négyzetre emelve a $(2n+1)a - s^2 = 2rs$ egyenlőség két oldalát és felhasználva r jelentését

$$4a^2n^2 + 4a^2n + a^2 - 4as^2n - 2as^2 + s^4 = 4r^2s^2 = 4as^2n^2 + 4bs^2.$$

Ezt n hatványai szerint rendezve

$$4a(a-s^2)n^2 + 4a(a-s^2)n + a^2 - 2as^2 + s^4 - 4bs^2 = 0.$$

Eszerint minden szóbajövő s értékhez legfeljebb két megfelelő n érték létezhet, ha $s^2 \neq a$.

Nem lehet viszont $s^2 = a$, mert ekkor egyenlőségünk azt adná, hogy $4ab = 0$, ami nem teljesülhet, mert sem a, sem b nem 0. Az n-re adott korlátok alatt összesen is csak véges sok nem negatív egész van. Ezzel a bizonyítandó állítást nyertük.