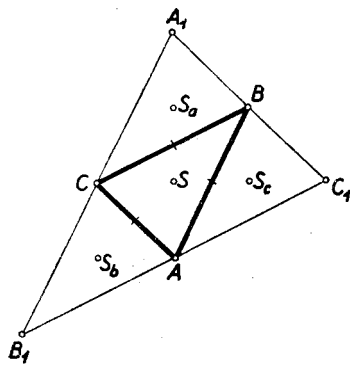


**I. megoldás.** Először belátjuk, hogy ha egy rácspontot egy másik rácspontra, vagy pedig két rácspont összekötő szakaszának felezőpontjára tükrözzük, akkor a tükrökép rácspont. Tudjuk ugyanis, hogy ha az  $A$  pontot  $B$ -re tükrözzük a  $C$  ponthoz jutunk, akkor  $A$  és  $C$  megfelelő koordinátáinak összegei a  $B$  pont megfelelő koordinátáinak kétszeresével egyenlők. Két rácspont összekötő szakaszának felezőpontjáról tudjuk tehát, hogy koordinátáinak kétszeresei egész számok. Még inkább igaz ez egy rácspontra, hiszen egész számok kétszeresei is egész számok. Ha most egy rácspontot ilyen pontra tükrözzük, akkor megállapításunk értelmében a tükrözött rácspont és a tükrözéssel nyert pont megfelelő koordinátáinak összegei egész számok. A tükrözéssel kapott pont tehát rácspont, mert koordinátái egész számok különbségei.

Tekintsük most már a feladatban szerepeltetett  $ABC$  háromszöget, s az ennek belsejében levő  $S$  rácspontot. Tükrözzük mind e pontokat az  $ABC\Delta$  oldalainak felezőpontjaira (6. ábra).



6. ábra

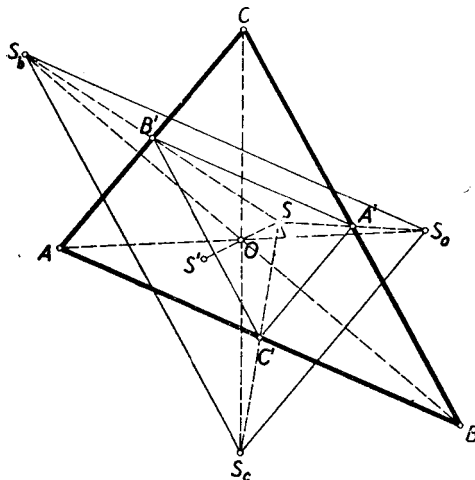
Valamennyi kapott pont rácspont. A kapott csatlakozó  $A_1BC$ ,  $AB_1C$ ,  $ABC_1$  háromszögek belsejében van rendre az  $S$ -ből tükrözéssel nyert  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  rácspont. E háromszögek belsejében több rácspont nincs, mert ha pl. az  $A_1BC\Delta$  még egy rácspontot tartalmazna, akkor ezt  $BC$  felezőpontjára tükrözve az  $ABC\Delta$ -ön belüli második rácsponthoz jutnánk.

Tükrözzük most az  $A_1$  rácspontot  $S_a$ -ra. Az így kapott rácspont az  $A_1B_1C_1$  belsejében van, mert az  $A_1$  pontból való kétszeres kinagyítás az  $A_1BC\Delta$ -et az  $A_1B_1C_1\Delta$ -be, az  $S_a$  pontot pedig a szóban forgó rácspontba viszi. Ez a rácspont tehát az  $S$ ,  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  rácspontok valamelyikével azonos, hiszen a fentiek szerint az  $A_1B_1C_1\Delta$  belsejében nincs más rácspont. Minthogy  $S_a$ -ra tükröztünk,  $S_a$  maga nem lehet ez a tükrökép. Bizonyítjuk, hogy  $S_b$  és  $S_c$  sem lehet. Elegendő ezt pl.  $S_c$ -re bizonyítanunk. Az  $AS$  szakasz tükröképe  $BC$  és  $AB$  felezőpontjára az  $A_1S_a$  és  $BS_c$  szakasz. E szakaszok tehát  $AS$ -sel, s így egymással is párhuzamosak és egyenlők. Ezért  $A_1S_aS_bB$  paralelogramma, és  $S_c$  valóban nem lehet  $A_1$ -nek  $S_a$ -ra vonatkozó tükröképe.

Beláttuk így, hogy  $A_1$ -nek  $S_a$ -ra vonatkozó tükröképe csak az  $S$  rácspont lehet. Ebből az következik, hogy  $A_1$ ,  $S_a$ ,  $S$  egy egyenesen van. Ez az egyenes áthalad  $SS_a$  és  $BC$  közös felezőpontján, tartalmazza tehát  $A_1$ -nek e felezőpontra vonatkozó tükröképét, az  $A$  pontot is. Eszerint  $S$  rajt van az  $ABC\Delta$   $A$ -ból induló súlyvonalán. Az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontok szerepének azonossága miatt rajta van akkor a másik két súlyvonalon is, ezért  $S$  az  $ABC\Delta$  súlypontja.

**II. megoldás.** Felhasználjuk az első megoldás első bekezdésében kimondottakat. Eszerint egy rácspontból való kétszeres kinagyítás minden rácspontot rácspontba visz.

Legyen ismét  $S$  a szerepeltetett  $ABC\Delta$  belsejében levő rácspont. Az  $S$  pontnak e háromszög középvonalai által alkotott  $A'B'C'\Delta$  belsejében kell lennie (7. ábra), mert ha pl. az  $AB'C'\Delta$  tartalmazná az  $S$  pontot, akkor az  $A$  pontból való kétszeres kinagyítás  $S$ -et az  $ABC\Delta$  által tartalmazott újabb rácspontba vinné.



Az  $S$  pontot az  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  pontokra tükrözve az  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  rácspontokat kapjuk. Az  $AS_a$ ,  $BS_b$ ,  $CS_c$  szakaszoknak közösen  $O$  felezőpontjuk van. Ezt pl. az  $AS_a$  és  $BS_b$  szakaszokra abból következtetjük, hogy  $ABS_aS_b$  paralelogramma, hiszen  $AB$  és  $S_aS_b$  párhuzamosak és egyenlők, mert mindkettő az  $A'B'$  szakasznak ( $C$ -ből, ill.  $S$ -ből való) kétszeres kinagyításával keletkezik.

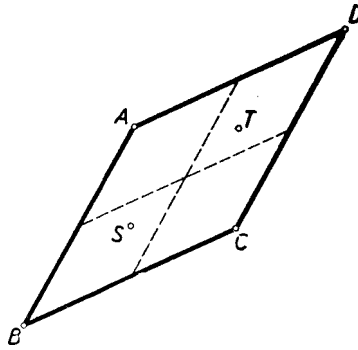
Az  $S$  pontnak  $O$ -ra vonatkozó tükörképe egy  $S'$  rácspont. Minthogy  $S$  az  $A'B'C'\Delta$ -ben, tehát még inkább az  $S_aS_bS_c\Delta$  belsejében helyezkedik el, azért  $S'$  e háromszög  $O$ -ra vonatkozó tükörképében, az  $ABC\Delta$ -ben van. Minthogy azonban ebben a háromszögben csak egyetlen rácspont van, kell, hogy  $S$  egybeessen  $S'$ -vel, tehát  $O$ -val is.

Ezek szerint az  $AS$ ,  $BS$ ,  $CS$  egyenesek azonosak az  $SS_a$ ,  $SS_b$ ,  $SS_c$  egyenesekkel, tehát áthaladnak az  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  pontokon. Ezek az egyenesek tehát az  $ABC$  súlyvonalai, és  $S$  a súlypontja.

**III. megoldás.** Háromszögünket egyik oldalának felezőpontjára tükrözve paralelogrammához jutunk. E paralelogramma belsejében tartalmazza a háromszögünk belsejében levő rácspontot és annak tükörképét, több rácspontot azonban nem. Ezt már az első megoldás bevezető részében is beláttuk. Elég ezért a következő állítást bizonyítanunk.

*Ha egy paralelogramma csúcsai rácspontok, a határán több rácspont nincs, és belsejében két rácspont van, akkor ezek a paralelogrammának egy átlóján vannak, s azt harmadolják.*

Először azt látjuk be, hogy egy paralelogramma belsejében levő ponthoz mindig található a paralelogrammának olyan csúcsa, hogy az e csúcsból való kétszeres kinagyítás azt a pontot a paralelogrammához tartozó pontba viszi. Ez nyomban következik abból, hogy a paralelogrammát két középvonala négy paralelogrammára bontja, és ezeknek mindegyike egy-egy csúcsból kétszeresre nagyítva a teljes paralelogrammába megy át. Tekintsük most már az állításunkban szerepeltetett paralelogrammát, és az ennek belsejében elhelyezkedő  $S$  és  $T$  rácspontokat (8. ábra).



8. ábra

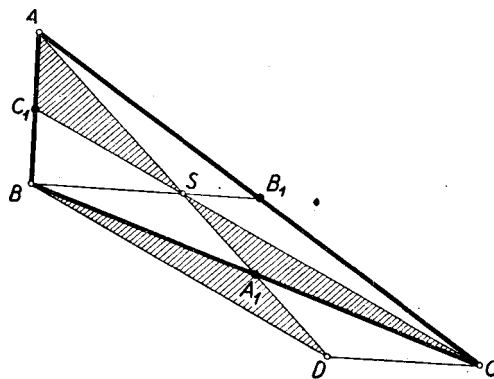
Nem szerepelhet ezek között a paralelogramma középpontja, mert akkor a másiknak erre vonatkozó tükörképe a paralelogramma belsejében elhelyezkedő harmadik rácspontot adna.

Az előre bocsátottak szerint a paralelogramma egyik  $B$  csúcsának  $S$ -re vonatkozó tükörképe a paralelogrammához tartozik. Ez a tükörkép nem lehet a paralelogrammának csúcsa, mert  $S$  nincs a paralelogramma határán és nem azonos a paralelogramma centrumával. Kell tehát, hogy e tükörkép a  $T$  pont legyen.

Ugyanígy adódik, hogy egy  $D$  csúcsnak  $T$ -re vonatkozó tükörképe  $S$ -sel azonos. Ezzel beláttuk, hogy  $S$  és  $T$  harmadolják a  $BD$  szakaszt.  $BD$  a paralelogrammának csak átlója lehet, hiszen  $S$  és  $T$  nem lehet a paralelogramma határán. Ezzel állításunkat bizonyítottuk.

**IV. megoldás.** Ismét támaszkodunk az első megoldás első bekezdésében kimondottakra.

A feladatban szereplő  $ABC\Delta$ -et súlyvonalai hat háromszögre bontják (9. ábra).



9. ábra

Az  $ABC\Delta$  belsejében levő egyetlen rácspontot e hat háromszögnek legalább egyike, pl. az  $AC_1S\Delta$  belsejében vagy határán tartalmazza, nem lehet azonban e rácspont az  $AC_1$  szakaszon. Az  $A$  pontból való kétszeres kinagyítás ezt a rácspontot olyan újabb rácspontba viszi, amelyik az  $AC_1S\Delta$  kinagyításával kapott  $ABD\Delta$ -ben vagy annak határán van, de nincs az  $AB$  szakaszon. Minthogy az  $ABC\Delta$  nem tartalmazhat belsejében második rácspontot, az újabb rácspontnak az  $A_1BD\Delta$ -ben vagy annak határán kell lennie, de  $B$ -vel azonos nem lehet. Ha most ezt a háromszöget az általa tartalmazott rácsponttal együtt az  $A_1$  pontra tükrözzük, azt kapjuk, hogy az  $A_1CS\Delta$ -ben vagy annak határán van egy  $C$ -től különböző rácspont. Ez a rácspont csak az  $ABC\Delta$ -ben levő egyetlen,  $AC_1S\Delta$  által is tartalmazott rácspont lehet. Ez az egyetlen rácspont azonos tehát háromszögünk  $S$  súlypontjával, hiszen az  $AC_1S$  és  $A_1CS$  háromszögeknek nincs más közös pontja.

*Megjegyzés.* A harmadik feladat állításának térbeli megfelelője nem igaz: van olyan tetraéder, melynek csúcsai rácspontok, határán nincs több rácspont, és belsejében egyetlen, a tetraéder súlypontjától különböző rácspont van. Így pl. az  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $D(2, 2, 5)$  csúcsok által adott tetraéder csak az  $R(1, 1, 2)$  rácspontot tartalmazza belsejében, és ez a tetraédernek nem súlypontja.