I. megoldás. A 6-ost tartalmazó, 3-mal osztható, ötjegyű számokat csoportosítsuk aszerint, hogy utolsó 6-os jegyük az egyesektől számítva hányadik jegy.

Az első csoportba azok a számok tartoznak, amelyeknek utolsó jegye 6-os, ilyen számhoz úgy jutunk, hogy a három közbenső jegyet tetszőlegesen választjuk meg, s ezután az első jegyet úgy választjuk meg az ide írható 9 jegy közül (mert 0 nem lehet első jegy), hogy a jegyek összege 3-mal osztható legyen. A közbenső jegyek mindegyikének megválasztásánál 10 lehetőség van, az első jegy megválasztásánál viszont csak 3 a lehetőségek száma, mert a már megválasztott jegyek összegétől függően vagy az 1, 4, 7, vagy a 2, 5, 8, vagy pedig a 3, 6, 9 jegyek közül választhatunk, hiszen valamennyi jegy összege kell, hogy 3-mal osztható legyen. Az első csoportba tartozó számok száma ezek szerint $3 \cdot 10^3 = 3000$.

A második, harmadik és negyedik csoportba tartozó számoknál a tízes, százas, ill. ezres jegy 6-os, és ezt követően 6-os jegy már nem szerepel. Ilyen számot keresve az ezt a 6-os jegyet követő jegyeket szabadon választhatjuk 9 jegy közül, hiszen 6-ost nem választhatunk, a megelőző jegyeket az elsőnek kivételével tetszőlegesen választhatjuk meg a 10 jegy közül. Az első jegy megválasztásánál ugyanaz a megkötés érvényesül, mint az első csoport esetében, e jegy megválasztásánál tehát mindig 3 lehetőség van. Ezekbe a csoportokba tehát rendre $3 \cdot 10^2 \cdot 9 = 2700$, $3 \cdot 10 \cdot 9^2 = 2430$, $3 \cdot 9^3 = 2187$ szám tartozik.

Az ötödik csoport számainak tízezres jegye 6-os, a többi nem hatos. Egy ilyen szám megválasztásánál a három közbenső jegyet szabadon választhatjuk a 9 megengedett jegy közül, hiszen 6-ost nem választhatunk. Az utolsó jegyet e 9 jegy közül úgy választjuk meg, hogy a szám jegyeinek összege 3-mal osztható legyen. Az utolsó jegy megválasztásánál a többi jegy összegétől függően az 1, 4, 7 vagy a 2, 5, 8, vagy pedig a 0, 3, 9 jegyek közül válogathatunk, tehát minden esetben 3 lehetőségünk van. Az ötödik csoportba ezek szerint $3 \cdot 9^3 = 2187$ szám tartozik.

Valamennyi csoportban együtt $3000 + 2700 + 2430 + 2187 + 2187 = 12\,504$ szám van.

II. megoldás. Először az ötjegyű, 6-ost tartalmazó számok számát határozzuk meg, tekintet nélkül arra, hogy vajon 3-mal oszthatók-e vagy sem. Ezután majd bizonyítjuk, hogy mind e számoknak éppen a harmada osztható 3-mal.

1. Jelöljük az n jegyű, 6-ost tartalmazó számok számát $f(n)$-nel. Vizsgáljuk az $n+1$ jegyű, 6-ost tartalmazó számokat, s ezeket soroljuk két csoportba aszerint, hogy utolsó jegyük 6-os vagy nem 6-os.

Az első csoporthoz tartozó számokat úgy kapjuk meg, hogy egy tetszőleges, n jegyű számhoz még egy 6-os jegyet fűzünk hozzá. Az első csoporthoz tartozó számok száma tehát a 10^{n-1}-től 10^n-ig terjedő, n jegyű számok számával egyenlő, azaz $10^n - 10^{n-1}$.

A második csoportba tartozó számot úgy kapunk, hogy egy n jegyű, 6-ost tartalmazó számhoz hozzáfűzünk egy 6-ostól különböző jegyet. Mivel ekkor 9 lehetőség van, a második csoportba tartozó számok száma $9f(n)$.

A két csoporthoz tartozó számok együttes száma ezek szerint

$$f(n+1) = 10^n - 10^{n-1} + 9f(n).$$

Minthogy egyetlen egyjegyű, 6-ost tartalmazó szám van, $f(1) = 1$. Ebből kiindulva a levezetett összefüggés felhasználásával sorra a következő értékekhez jutunk: $f(2) = 18$, $f(3) = 252$, $f(4) = 3168$, $f(5) = 37\,512$.

2. Nyilvánvaló, hogy ha egy számtani sorozat elemeinek száma 3-mal osztható, és a különbség 3-mal osztva maradékul 1-et ad, akkor a sorozat elemeinek éppen a harmada osztható 3-mal. Több ilyen sorozat elemeinek együttesére is igaz ez a megállapítás, feltéve, hogy a sorozatoknak nincs közös elemük. Az ötjegyű, 6-ost tartalmazó számokról fentebb kimondott állításunkat bizonyítjuk tehát, ha e számokat közös elem nélküli, 3-mal osztható elemszámú, 3-mal osztva maradékul 1-et adó különbségű számtani sorozatokba soroljuk. Ezt a következőképpen tesszük:

A 6-osra végződő számok egy 10 006-tal kezdődő 99 996-ra végződő, 9000 elemű, 10 különbségű számtani sorozatot alkotnak. A más jegyre végződő számokat olyan csoportokba gyűjtjük, amelyekben csak az utolsó jegy az eltérő. Minden egyes ilyen csoportban a 0, 1, 2, 3, 4, 5 jegyekre végződő számok egy 6 eleme, 1 különbségű, és a 7, 8, 9 jegyekre végződők egy 3 elemű, 1 különbségű számtani sorozatot alkotnak.

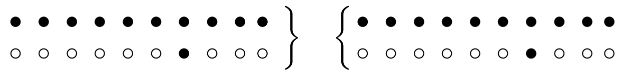
Mivel mind e sorozatok megfelelnek követelményeinknek, igazoltuk, hogy az ötjegyű, 6-ost tartalmazó számoknak harmada, azaz $37\,512 : 3 = 12\,504$ osztható 3-mal.

III. megoldás. Ismét először valamennyi ötjegyű, 6-ost tartalmazó számnak számát határozzuk meg, majd bizonyítjuk, hogy ezeknek harmada osztható 3-mal.

1. Összesen 90 000 ötjegyű szám van. Az ötjegyű, 6-ost nem tartalmazó számok számát határozzuk meg. Ilyen számot úgy kapunk, hogy első jegynek a 0 és 6 kizárásával maradó 8 jegy közül választunk egyet, a többi jegy megválasztásánál pedig csak a 6-ost zárjuk ki, azaz mind a négy esetben 9 lehetőség között választunk. Az ötjegyű, 6-ost nem tartalmazó számok száma tehát $8 \cdot 9^4 = 52\,488$. Az ötjegyű, 6-ost tartalmazó számok száma tehát $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$. Ez 3-mal osztható szám.

2. Írjuk fel növekvő rendben az ötjegyű számokat. Tagoljuk ezt a sorozatot tízes szakaszokba, egy–egy szakaszba foglalva azokat a számokat, amelyek csak az utolsó jegyben különböznek egymástól. Jelöljük meg mindegyik szakaszban a 6-ost tartalmazó számokat. Vannak szakaszok, amelyekben minden számot megjelölünk, ti. azokban a szakaszokban, amelyeknek nem változó, első jegyei között 6-os is szerepel. A többi szakaszban csak egy–egy számot, a 6-osra végződőt

jelöljük meg.



5. ábra

Vizsgáljuk meg, mekkora lehet a különbség két–két, egymáshoz legközelebbi megjelölt szám között.[1] Ha e két szám ugyanahhoz a szakaszhoz tartozik, a szakasz csupa megjelölt számból áll, és a különbség 1. Ugyancsak 1 a különbség, ha a két szám két szomszédos, csupa megjelölt számból álló szakaszhoz tartozik. Ha a tekintett két szám közül a kisebbik egy csupa megjelölt számból álló szakaszhoz, a nagyobbik meg nem ilyenhez tartozik, akkor a különbség 7. Ha a nagyobbik tartozik csupa megjelölt számból álló, s a kisebbik meg nem ilyen szakaszhoz, akkor különbségük 4. Ha végül mindkét szám olyan szakaszhoz tartozik, amelynek nincs minden száma megjelölve, akkor 10 a különbségük. A vizsgált különbség lehetséges értékei 1, 4, 7, 10.

Minthogy e számok mindegyike 3-mal osztva 1-et ad maradékul, megállapíthatjuk, hogy a megjelölt számok nagyság szerinti egymásutánjában minden harmadik osztható 3-mal, hiszen minden 3-mal osztható számra olyan következik ebben az egymásutánban, amelyik 3-mal osztva 1-et ad maradékul, erre olyan amelyik 2-t ad maradékul, s erre megint egy 3-mal osztható következik. Minthogy a megjelölt számok száma osztható 3-mal, ezeknek harmada, azaz $37\,512 : 3 = 12\,504$ osztható 3-mal.

IV. megoldás. A 90 000 ötjegyű szám között minden harmadik tehát összesen 30 000 osztható 3-mal. Határozzuk meg, hogy ezek között hány 6-ost nem tartalmazó van.

Egy ilyen szám első jegyét 8-féleképpen választhatjuk meg, mert 0 és 6 nem választható. A második, harmadik és negyedik jegy megválasztásánál 9 lehetőség van, hiszen csak a 6-os választását kell kizárnunk. Az utolsó jegyet úgy kell megválasztanunk, hogy a jegyek összege 3-mal osztható legyen. A már megválasztott jegyek összegétől függően tehát vagy az 1, 4, 7 vagy a 3, 5, 8, vagy pedig a 0, 3, 9 jegyek között, vagyis mindig 3 lehetőségből választhatunk.

Az ötjegyű, 6-ost nem tartalmazó, 3-mal osztható számok száma ezek szerint $8 \cdot 9^3 \cdot 3 = 17\,496$, az ötjegyű, 6-ost tartalmazó, 3-mal oszthatóké pedig $30\,000 - 17\,496 = 12\,504$.

[1] Az 5. ábra szemlélteti a számba vett lehetőségeket. Ezen az ábrán a fekete körök megjelölt számokat, a fehér körök meg nem jelölt számukat jelképeznek.