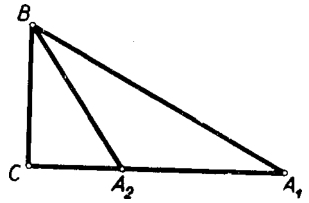
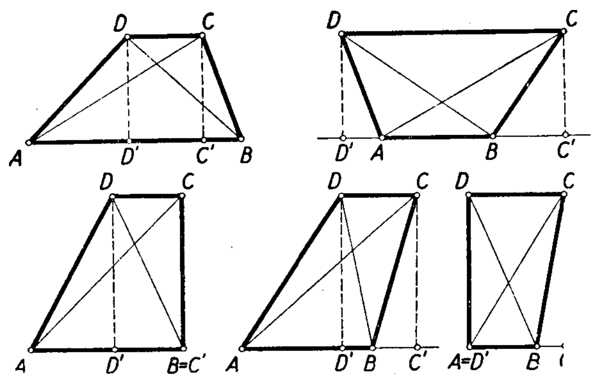
I. megoldás. Segédtételként előre bocsátjuk a következő megállapítást: Ha két derékszögű háromszögben az egyik befogó ugyanakkora, és a két háromszög nem egybevágó, akkor ugyanabban a háromszögben található a másik befogóknak és az átfogóknak nagyobbika az egyenlő befogókkal szemközti szögeknek pedig kisebbike. Ennek belátására fektessük egymásra a két háromszöget úgy, hogy derékszögeik és egyenlő befogóik fedjék egymást (1. ábra).



1. ábra

Az egyiknek CA_1 befogója túlnyúlik ebben a helyzetben a másiknak CA_2 befogóján, hiszen a háromszögek nem egybevágók. A keletkező $A_1A_2B\triangle$ tompaszögű, s ezért $BA_1 > BA_2$. Ugyanennek a háromszögnek külső szögére vonatkozólag viszont $BA_1C\sphericalangle < BA_2C\sphericalangle$ adódik.



2. ábra

Tekintsük most már az $ABCD$ trapéz AB alapján nyugvó szögeket (2. ábra), és legyen

$$DAB\sphericalangle < CBA\sphericalangle. \tag{1}$$

A C és D csúcsot az AB egyenesre vetítve a C' és D' pontokhoz jutunk. Bizonyítanunk kell az

$$AC > BD \tag{2}$$

egyenlőtlenséget. Elegendő ehhez az

$$AC' > BD' \tag{3}$$

egyenlőtlenséget bizonyítanunk. Ha ugyanis $BD' \neq 0$, akkor segédtételünket az ACC' és BDD' háromszögekre alkalmazva (3)-ból (2) adódik. Ha viszont B és D' azonos, akkor $BD = CC'$, és így (2) abból adódik, hogy az ACC' derékszögű háromszög átfogója a befogónál hosszabb.

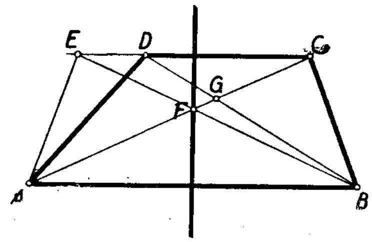
(3) bizonyításánál a DAB és CBA szög minőségének megfelelően három esetet különböztetünk meg.

1. Ha mindkettő hegyesszög, akkor segédtételünket az ADD' és BCC' háromszögekre alkalmazva (1) alapján $AD' > BC'$ adódik, és az ezeket AB-re kiegészítő szakaszokra (3) érvényes.

2. Ha mind a két szög tompaszög, akkor ismét az ADD' és BCC' háromszögekre alkalmazzuk segédtételünket. Most azonban $DAD'\sphericalangle > CBC'\sphericalangle$, mert ezek az (1)-ben szereplő szögeknek kiegészítő szögei. A segédtétel alapján tehát $AD' < BC'$, és ezeket AB-vel megnövelve (3) adódik.

3. Ha $DAB\sphericalangle \leq 90°$ és $CBA\sphericalangle \geq 90°$, akkor az AB egyenesen az $\overrightarrow{AB}$ irányban haladva D' nem lehet A előtt, és C' nem lehet B előtt. Az AC' szakasz tartalmazza tehát a BD' szakaszt. Ez utóbbi nem lehet AC'-vel azonos sem, mert (1) miatt nem lehet mind a két szereplő szög derékszög. A részként tartalmazott szakasz hosszára tehát teljesül a (3) egyenlőtlenség.

II. megoldás. Növeljük meg az $ABCD$ trapéz AB alapján nyugvó kisebbik, $DAB\sphericalangle$-ét akkorára, amekkora a $CAB\sphericalangle$. Így az egyenlő szárú $ABCE$ trapézhez jutunk (3. ábra), melynek átlói a szimmetria miatt az AB szakasz felezőmerőlegesén metszik egymást.



3. ábra

Ezt az F metszéspontot C-vel összekötő FC szakasz a felezőmerőlegesnek azon az oldalán van, amelyiken a B pont. Ugyanezen az oldalon van tehát az eredeti trapéz átlóinak G metszéspontja is, hiszen a D pont az EC szakasz belsejében van, és a $BCE\triangle$-ből az adódik, hogy BD metszi az FC szakaszt. Minthogy az AB szakasz felezőmerőlegese által meghatározott félsíkok közül a B pontot tartalmazónak pontjai közelebb vannak B-hez, mint A-hoz, ez áll a G pontra, azaz

$$GA > GB.$$

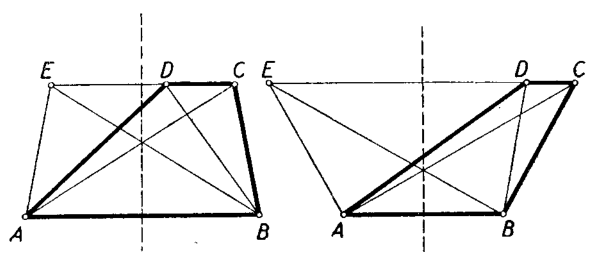
Az $ABG\triangle$ és $CDG\triangle$ hasonló, mert szögeik páronként csúcsszögek, ill. váltószögek. A bizonyított egyenlőtlenség következményeként tehát

$$GC > GD.$$

Egyenlőtlenségeink összegezésével a bizonyítandó $AC > BD$ egyenlőtlenséget kapjuk.

III. megoldás. Az $ABCD$ trapéz AB alapján nyugvó kisebbik szög növelésével egyenlő szárú $ABCE$ trapézhez jutunk (4. ábra). E trapéz szimmetria–tengelye az EC szakasz felezőmerőlegese. Minthogy B ennek a felezőmerőlegesnek azon az oldalán van, amelyiken a felezett CE szakasz C végpontja, azért $BC < BE$. A szimmetria folytán $AC = BE$. A BCD és BDE háromszögek D-nél fekvő szögei egymást $180°$-ra egészítik ki, ezért e szögeknek valamelyike vagy hegyesszög vagy tompaszög. Minthogy a tompaszöggel szemben a háromszögnek legnagyobb oldala helyezkedik el, a két háromszögnek valamelyikéből az következik, hogy BD kisebb a BE és BC szakaszok valamelyikénél, tehát kisebb e szakaszok nagyobbikánál, az AC-vel egyenlő BE szakasznál.

IV. megoldás. Az $ABCD$ trapézt, az AB átlón nyugvó kisebbik szöget növelve, szimmetrikus $ABCE$ trapézzé egészítjük ki (4. ábra).



4. ábra

A háromszög külső szögére vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$EDB\sphericalangle > DCB\sphericalangle,$$

a szimmetria miatt pedig

$$DCB\sphericalangle = AED\sphericalangle.$$

Így tehát a $BDE\triangle$-ben D-nél nagyobb szög helyezkedik el, mint E-nél, mert a $BED\triangle$ része az $AED\sphericalangle$-nek, amelyről beláttuk, hogy $EDB\sphericalangle$-nél kisebb. Minthogy egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, így $BE > BD$. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk, hiszen a szimmetria miatt $AC = BE$[1].

[1]Ez a megoldás szerepel a *Mathematikai versenytételek, I. rész* (Középiskolai szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, 1955) 70. oldalán.