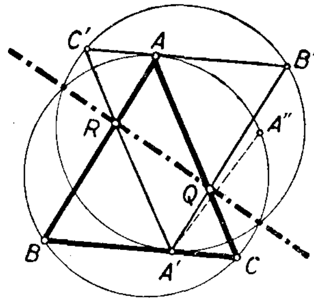
a) *A Kürschák verseny 2. feladata és általánosítása.*

Lapunk 3. számában a szóbanforgó feladat öt különböző megoldását adtuk és további feladatul tűztük ki e megoldások általánosítását. Mielőtt erre rátérnénk, közöljük a feladatot és egy VI. megoldását, ez is általánosítható.

Egy egyenlőszárú háromszög alapján felvett P pontból a szárakkal párhuzamost húzunk, ezek a szárakat Q és R pontban metszik. Bizonyítandó, hogy a P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképe az egyenlőszárú háromszög köré írt kör kerületén van.

VI. megoldás: Legyen az egyenlőszárú háromszög ABC, az alapján felvett pont $P = A'$, a feladat szerint a szárakkal húzott párhuzamosokat messük el egy a háromszög alapjával párhuzamos, A-n átfektetett egyenessel is, a metszéspontok legyenek C' és B'.

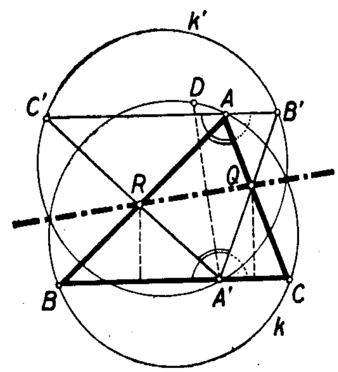


Nyilván $ABC\triangle \simeq A'B'C'\triangle$, hiszen $A'C' = AC$ és $A'B' = AB$, mert egy-egy parallelogrammának szembenfekvő oldalai $BAC\sphericalangle = B'A'C'\sphericalangle$, mint az $AQA'R$ paralelogrammának szembenfekvő szögei. Így az ABC köré írt k kör és az $A'B'C'$ köré írt k' kör egyenlő sugarú és ha ki tudnánk mutatni, hogy QR a két körnek hatványvonala, akkor egyúttal szimmetriatengelyük is volna, ez pedig biztosítaná hogy a k'-n fekvő A' pont tükörképe A'' a k-n legyen. QR azonban valóban a két kör hatványvonala, mert Q-nak is R-nek is egyenlő mindkét körre vonatkozó hatványa: $QA \cdot QC = QB' \cdot QA'$, mert $QA = QB'$, $QC = QA'$, hasonlóképpen $RA \cdot RB = RC' \cdot RA'$.

A feladat általánosítása arra az esetre, ha a háromszög nem egyenlőszárú:

Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük a P pontot, a PC szakasz felező merőlegese az AC oldalt a Q pontban, a PB szakasz felező merőlegese az AB oldalt az R pontban metszi. A P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképe az ABC háromszög köré írt körön van.

Az előbbi módszer erre így vihető át: A feladatban szereplő P pontot jelöljük most is A'-vel. Húzzuk meg A-n át a BC-vel párhuzamos egyenest, ez messe $A'Q$-t a B', $A'R$ egyenest a C' pontban.



Nyilván $ABC\triangle \simeq A'B'C'\triangle$ miután $A'B'$ tükörképe CA-nak $A'C$ felező merőlegesére nézve, $A'C'$ tükörképe BA-nak BA' felező merőlegesére nézve és a két ívvel megjelölt $A'\sphericalangle = A\sphericalangle$, mert az azokat $180°$-ra kiegészítő egy ívvel illetve pontozással megjelölt szögek egyenlők. Így az $ABC\triangle$ köré írt k kör sugara egyenlő az $A'B'C'\triangle$ köré írt k' kör sugarával, QR-ről emiatt ismét elég belátni, hogy a két kör hatványvonala, mert ez esetben szimmetriatengelyük is, tehát a k'-n fekvő A' tükörképe A'' tényleg k-n lenne. Az előbbi esethez hasonlóan, most is egyszerűen beláthatjuk, hogy Q-nak is egyenlő mind a két körre vonatkozó hatványa, R-nek is.