Az 1960. évi decemberi számban közölt cikk alapján megállapíthatjuk, hogy az elhajított tárgy a burkológörbénél messzebb nem kerülhet. A burkológörbe egyenlete:

$$y = F - \frac{1}{4F} \cdot x^2, \qquad \text{ahol} \qquad F = \frac{c^2}{2g}.$$

Helyezzünk a β hajlásszögű lejtőre egy koordináta-rendszert, melynek x tengelye vízszintes, y tengelye függőleges, és origója az elhajítás A pontja. A rajzunk síkjától eltérő függőleges síkokban a burkológörbe ugyanaz, tehát a burkológörbék forgási paraboloidot alkotnak, amelyet a β hajlásszögű síkkal kell metszeni. Ez a metszet ellipszis, tehát a keresett mértani hely ellipszis, amelynek az adatait most számítással meghatározzuk.

Nyilvánvaló, hogy az ellipszis nagytengelye a lejtő egyeneséből kivágott PQ darab. A metszéspontokat meghatározó egyenlet:

$$x \cdot \operatorname{tg} \beta = F - \frac{1}{4F} \cdot x^2.$$

Ennek megoldása a P és Q pontok x-koordinátájára nézve:

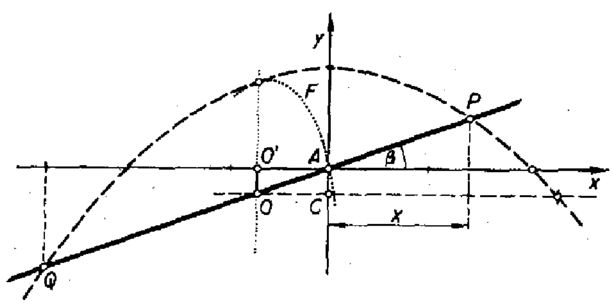
$$x = -2F(\operatorname{tg} \beta \mp \sec \beta).$$

A lejtőn mért távolságokat $\cos \beta$-val való osztással kapjuk:

$$AP = 2F \cdot \frac{1 - \sin \beta}{\cos^2 \beta},$$
$$QA = 2F \cdot \frac{1 + \sin \beta}{\cos^2 \beta}.$$

Az ellipszis fél nagytengelye a $QP = QA + AP$ távolság fele, vagyis:

$$a = \frac{2F}{\cos^2 \beta} = QO = OP.$$



A fél kistengely keresésekor gondoljuk meg, hogy A pontból rajzunk síkjára merőleges síkban ismert módon éppen $2F$ távolságra lehet hajítani, mert ebben az esetben az elhajított tárgy az elhajítás helyével egy magasságban levő pontban érkezik meg. O középpontú koordináta-rendszerünkben, a lejtő síkjában, ellipszisünk centrális elhelyezésű és függvénye:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

X és Y a görbe pontjainak koordinátái a lejtő síkjában. Tudjuk, hogy $a = 2F : \cos^2 \beta$ és $X = OA = OP - AP = \dfrac{2F \sin \beta}{\cos^2 \beta}$ esetében $Y = 2F$. Ezeket helyettesítve az ellipszis függvényébe, megkapjuk a fél kistengelyt:

$$b = \frac{2F}{\cos \beta}.$$

Az excentricitás $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \dfrac{2F \sin \beta}{\cos^2 \beta}$, tehát annyi, mint OA. Ezek szerint ellipszisünk egyik gyújtópontja az elhajítás A pontja.

Vincze Imre (Bp., XVIII., Hengersor u. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. A lejtő síkjában fekvő ellipszist vetítsük az O pont magasságában fekvő vízszintes síkra. Ekkor b kistengely hossza változatlan marad, az új nagytengelyt viszont úgy kapjuk, ha a régit, vagyis a-t szorozzuk $\cos \beta$-val; ekkor ugyancsak a $2F : \cos \beta$ értéket kapjuk. Tehát mértani helyünk vízszintes síkra való vetülete kör.

Máté Attila (Szeged, Radnóti g. I. o. t.) felhívja arra a figyelmet, hogy a mértani hely akkor is ellipszis, ha az A pontból elhajított tárgyat nem az A ponton átmenő, hanem más, β hajlásszögű síkon fogjuk fel. Gondolatának követése arra vezet, hogy ha az A pontból elhajított tárgyat β hajlásszögű, de nem A ponton átmenő síkon fogjuk fel, és a hajítási távolság maximális, akkor az ellipszisek fókuszai egy parabolán helyezkednek el, melynek függvénye:

$$y = -\frac{1}{4F\sin^2\beta}\cdot x^2 - \operatorname{ctg}\beta\cdot x.$$

Közben az ellipszisek centrumai az OO' függőleges egyenesben maradnak.