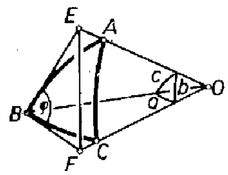
A mesterséges hold olyan körpályán kering közel a Föld felszínéhez, amely kör síkja a Föld főköre. A körpálya síkja a naprendszerhez képest állandó helyzetű marad, ellenben a Föld elforog alatta, ezért a mesterséges hold köralakú pályájának egyes pontjai alá a Föld felszínének mindig más és más pontja kerül.

Tekintsük először azt az esetet, ha a Föld nem forogna tengelye körül. Ebben az esetben a mesterséges hold mindig ugyanazon a főkörön repülné körül a Földet. A földgömbön egy pont helyzetét a földrajzi hosszúság és b földrajzi szélesség határozza meg; a és b szögek (1. ábra). A pont a hosszúsága a $BOC\sphericalangle$, b szélessége pedig $AOC\sphericalangle$. BC az egyenlítő egy íve, a BO rádiusztól számítandó. AC az A-n átmenő meridián egy íve; az AOC sík merőleges az egyenlítő BOC síkjára. BA a Vosztok 2. pályájának íve; ennek az ívnek a síkja alkot φ lapszöget az egyenlítő síkjával. B-ben érintőket húzunk BA és BC ívekhez, ezeknek az $EBF\sphericalangle = \varphi$ szöge méri ezt a lapszöget. A BA ívhez tartozó középponti szög c. Feladatunk, hogy kiszámítsuk a-nak és b-nek c-től való függését.



1. ábra

A lapszögmérés eljárásából következően BEF sík merőleges BFO síkra. Mivel AC meridián íve, ezért EFO sík is merőleges BFO síkra. Következésképp BEF és EFO síkok EF metszésvonala is merőleges BFO síkra. FBO derékszögű háromszögből $\operatorname{tg} a = BF : BO$. Azonban $BF = BE\cos\varphi$, $BE = BO\operatorname{tg} c$, $BF = BO\cdot\operatorname{tg} c\cdot\cos\varphi$, és végeredményben:

$$\operatorname{tg} a = \cos\varphi\cdot\operatorname{tg} c.$$

Az EFO derékszögű háromszögből $\sin b = EF : EO$. Folytatva $EF = BE\sin\varphi$, és $EO = BE : \sin c$, ezért

$$\sin b = \sin\varphi\cdot\sin c.$$

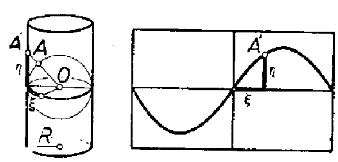
Tulajdonképp a derékszögű gömbháromszögre érvényes tételhez jutottunk.

AC ív a mesterséges hold t perc alatt megtett útja. A Vosztok 2. szögsebessége $\omega = \dfrac{360^\circ}{88{,}6\ \text{perc}} = 4{,}06$ fok/perc. Ezért $c = \omega t$, és a Föld azon pontjának koordinátái, amely felett t perckor tartózkodott az űrhajó:

$$\operatorname{tg} a = \cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\omega t, \tag{1}$$

$$\sin b = \sin\varphi\cdot\sin\omega t. \tag{2}$$

Az idő az egyenlítő B pontban történő átlépésétől számítandó.



2. ábra

Igen áttekinthető képet kapunk, ha az űrhajó helyét nem a földgömbre, hanem a Mercator-féle vetületben készült térképre rajzoljuk. A földgömböt hengerrel vesszük körül, amely az egyenlítő mentén érinti (2. ábra). A földgömb felszíni pontjait D középpontból kivetítjük a henger felszínére, így kapjuk A pontból A'-t. Ezután a hengert kiterítjük a síkra, és megkapjuk a Föld Mercator-vetületbe készült térképét. Ezen A' pont koordinátái

$$\xi = R\ a_{\text{rad}}$$

$$\eta = R\ \operatorname{tg} b. \tag{3}$$

R a földgömb rádiusza. Ide helyettesítjük a (2)-ből kifejezett $\operatorname{tg} b$ értékét:

$$\eta = R\ \operatorname{tg} b = \frac{R\sin b}{\sqrt{1-\sin^2 b}} = \frac{R\sin\varphi\sin\omega t}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\sin^2\omega t}}.$$

Ebből és (1)-ből kiküszöböljük ωt-t. (1) alapján

$$\sin\omega t = \frac{\operatorname{tg}\omega t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\omega t}} = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos\varphi\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2\varphi}}} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{\cos^2\varphi+\operatorname{tg}^2 a}}.$$

Ezzel számítva η-t:

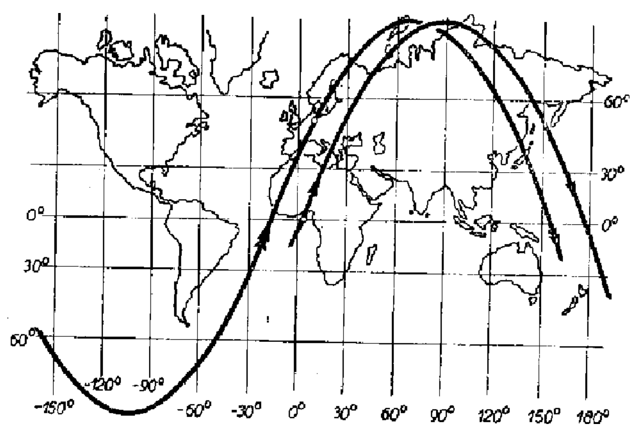
$$\eta = \frac{R\sin\varphi\cdot \operatorname{tg} a}{\sqrt{\cos^2\varphi + \operatorname{tg}^2 a}\cdot\sqrt{1-\sin^2\varphi\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2\varphi+\operatorname{tg}^2 a}}} = R\,\operatorname{tg}\varphi\cdot\sin a. \tag{4}$$

Tehát a nyugvó földgömb Mercator-térképén a mesterséges hold pályája sinus-görbe, amelynek 1 hulláma fér rá az egyenlítőre, és amplitúdója a φ pályahajlás szögétől függő érték. Ha a $\varphi = 0°$, a keringés az egyenlítő síkjában történik, és az amplitúdó nulla; ha $\varphi = 90°$, az amplitúdó felmenne a Föld 90-ik szélességi fokáig (a Mercator-térképre nem férne rá).

Most következik a Föld forgásának a figyelembe vétele. A Föld a naprendszerhez képest 23 óra 56 perc alatt fordul meg tengelye körül, tehát szögsebessége $\Omega = 0{,}25$ fok/perc. A Vosztok 2. egyetlen 88,6 perces körülmenetele alatt a Föld elforgása 22,2°. A tengelye körül forgó Föld esetében a Mercator-vetületes térképen leírt görbe η koordinátája marad a (3) alatti érték. Ami a ξ koordinátát illeti,

$$\xi = R\cdot(a_{\mathrm{rad}} - \Omega t). \tag{5}$$

Tehát a számítás menete a következő. (1) alapján a megadott t-vel kiszámítjuk a-t, azután (5)-tel ξ-t. Ugyanezzel a megadott t-vel (2) alapján kiszámítjuk b-t, ami (3) alapján η-t adja meg. Ezzel megvan a Mercator-térképen a ξ és η koordináta a kérdezett pillanatban. A számítás csak így paraméteresen végezhető el, de a görbe nagy közelítéssel hasonlít sinus-görbéhez , amelynek hullámhossza $360° - 22{,}2° = 337{,}8°$, amplitúdója most is a φ-ből következő érték. Ezek a sinusgörbék egymás mellé rajzolódnak, idővel mindig sűrűbben behálózzák a Föld felszínét. (3. ábra).



3. ábra

A mi esetünkben az egyenlítőn való áthaladástól számított időtartam $t = 10$ óra 19 perc $-$ 8 óra 44 perc $= 104$ perc. Így $\operatorname{tg} a = \cos 65°\cdot \operatorname{tg} 4{,}06\cdot 104 = 0{,}4226\cdot 1{,}881 = 0{,}7949$ és $a = 38{,}5°$. A Föld elforgása ezalatt $\Omega t = 0{,}257\cdot 104 = 26{,}25°$, így az (5)-ben használandó szög $38{,}5° - 26{,}25° = 12{,}25°$. Ez hozzáadandó az induláskor már meglevő 3,5°-hoz, így a keresett hely keleti hosszúsága $3{,}5° + 12{,}25° = 15{,}75°$. Az északi szélességre nézve: $\sin b = \sin 65°\cdot\sin 4{,}06\cdot 104 = 0{,}9063\cdot 0{,}8829 = 0{,}8001$, tehát az északi szélesség $b = 53{,}1°$. Az eredményül kapott hely kb. 100 km-re Berlintől keletre van. A Vosztok 2. a görbéink mellett jobbra-balra rajzolt kb. 300 km széles sávból lett volna szabad szemmel látható, ha az elvonulás az illető helyen napnyugta után vagy napkelte előtt 1 órán belül történt volna, amikor a mesterséges égitest még fényt kap a Naptól, de már az éjszakai sötét háttér előtt látszik lebegni.

Nagy Dénes Lajos (Bp., Rákóczi g. IV. o. t.) és
Zalán Péter (Aszód, Petőfi g. IV. o. t.) dolgozatai alapján.