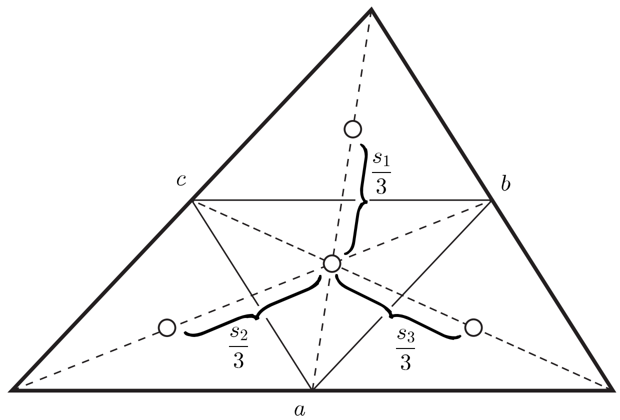
I. megoldás: Húzzuk meg a háromszög középvonalait, ezek négy darab hozzá hasonló, egybevágó háromszögre bontják.



Így a háromszög tömegét M-mel jelölve, a kis háromszögek tömege $\dfrac{M}{4}$, és súlypontjaik távolsága a nagy háromszög súlypontjától: 0, $s_1/3$, $s_2/3$, $s_3/3$. Alkalmazva a XXII. kötet 1. és 2. számában megjelent cikk tételeit:

$$Ma_x^2a^2=\frac{M}{4}a_x^2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left[\frac{M}{4}a_x^2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{M}{4}\left(\frac{s_1}{3}\right)^2\right]+\left[\frac{M}{4}a_x^2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{M}{4}\left(\frac{s_2}{3}\right)^2\right]+\left[\frac{M}{4}a_x^2\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{M}{4}\left(\frac{s_3}{3}\right)^2\right]$$

innen M-mel egyszerűsítve, összevonva és rendezve:

$$a_x^2=\frac{s_1^2+s_2^2+s_3^2}{27\,a^2}.$$

Fejezzük ki a súlyvonalakat az oldalak segítségével! Ismeretes, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő oldalainak négyzetösszegével. Alkalmazzuk ezt a nagy háromszögnek oldalfelező pontjaira való tükrözésével nyert paralelogrammákra:

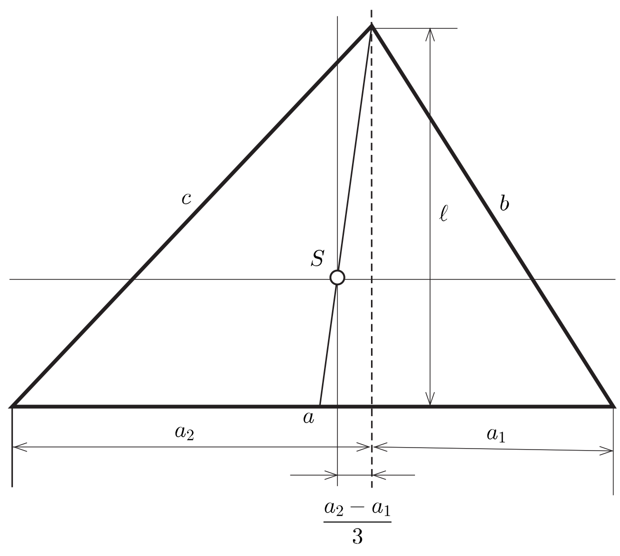
$$4s_1^2+a^2=2(b^2+c^2),\quad 4s_2^2+b^2=2(a^2+c^2),\quad 4s_2^2+c^2=2(a^2+b^2).$$

Ezen egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy $s_1^2+s_2^2+s_3^2=3/4(a^2+b^2+c^2)$. Tehát a tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta=Ma_x^2\cdot a^2=\frac{M}{36}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Vesztergombi György (Bp., Piarista g. III. o. t.)

II. megoldás: A keresett tehetetlenségi nyomaték egyenlő a háromszög súlypontján átmenő és az egyik oldallal párhuzamos, valamint a súlyponton átmenő, erre merőleges tengelyekre vonatkozó Θ_1, Θ_2 tehetetlenségi nyomatékok összegével. Az előbbi egyenlő egy ℓ hosszúságú, M tömegű lineárisan növekvő sűrűségű egyenes vonaldarab tehetetlenségi nyomatékával, hiszen a háromszög pontjait eltolhatjuk a tengellyel párhuzamosan.



Tehát $\Theta_1=\dfrac{M}{18}\ell^2$. A második nyomaték meghatározásához előbb kiszámítjuk a háromszög tehetetlenségi nyomatékát az illető tengellyel párhuzamos, harmadik csúcsponton átmenő tengelyre vonatkozólag. A háromszög pontjait ezen tengellyel párhuzamosan eltolva két lineárisan növekvő sűrűségű rudat kapunk; ezek tehetetlenségi nyomatékát kell meghatároznunk a végpontjukon átmenő tengelyre vonatkozólag. A Steiner–tétel segítségével e két nyomaték összege:

$$\left[\frac{1}{18}M_1a_1^2+M_1(a_1/3)^2\right]+\left[\frac{1}{18}M_2a_2^2+M_2(a_2/3)^2\right]=\frac{1}{6}(M_1a_1^2+M_2a_2^2)=$$

$$=\frac{1}{6}(Ma_1/a\cdot a_1^2+Ma_2/a\cdot a_2^2)=\frac{1}{6}M/a(a_1^3+a_2^3)=\frac{M}{6}(a_1^2-a_1a_2+a_2^2).$$

Így a súlyponton átmenő tengelyre vonatkozólag a háromszög tehetetlenségi nyomatéka ugyancsak a Steiner–tétel alapján $\Theta_2=\frac{M}{6}(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)-M\left(\frac{a_2-a_1}{3}\right)^2$. Felhasználva, hogy $\ell^2=b^2-a_1^2$, $\ell^2=c^2-a_2^2$, a súlyponton átmenő, a háromszög síkjára merőleges tengelyre vonatkoztatott nyomaték:

$$\begin{aligned}\Theta=\Theta_1+\Theta_2&=\frac{M}{18}\ell^2+\frac{M}{6}(a_1^2-a_1a_2+a_2^2)-\frac{M}{9}(a_1^2-2a_1a_2+a_2^2)=\\&=\frac{M}{36}(2\ell^2+6a_1^2-6a_1a_2+6a_2^2-4a_1^2+8a_1a_2-4a_2^2)=\\&=\frac{M}{36}(b^2-a_1^2+c^2-a_2^2+2a_1^2+2a_2^2+2a_1a_2)=\\&=\frac{M}{36}\left[b^2+c^2+(a_1+a_2)^2\right]=\frac{M}{36}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

Szidarovszky Ágnes (Bp., Ságvári E. g. III. o.t.)