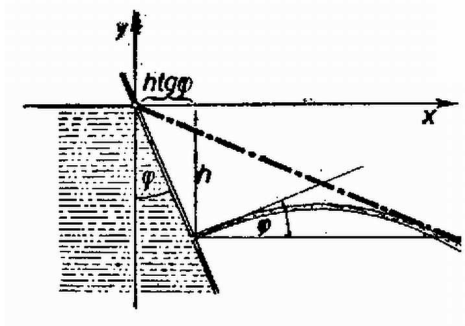
I. megoldás: Helyezzük el a koordináta-rendszert az ábrán látható módon.



A vízfelszín alatt h mélységben a vízsugár a falra merőlegesen $\sqrt{2gh}$ sebességgel lép ki. A fal h mélységű pontjához $h\operatorname{tg}\varphi$ abszcissza tartozik, így t idő múlva a vízrészecske koordinátái, a merőleges szárú szögeket figyelembevéve:

$$x = h\operatorname{tg}\varphi + t\sqrt{2gh}\cos\varphi,$$
$$y = -h + t\sqrt{2gh}\sin\varphi - \frac{g}{2}t^2.$$

Az első egyenletből t-t kifejezve az egyenletrendszerből t-t kiküszöböljük, majd a kapott egyenletet h szerint rendezzük:

$$h^2(4+\operatorname{tg}^2\varphi) - h[2x(\sin 2\varphi + \operatorname{tg}\varphi) - 4y\cos^2\varphi] + x^2 = 0.$$

A burkológörbét azon $(x,\, y)$ pontok alkotják, amelyekhez csak egy lyukból (vagyis egy h mellett) juthat el a vízsugár. Tehát a burkológörbe egyenletét megkapjuk, ha ezen h-ban másodfokú egyenlet diszkriminánsát 0-val tesszük egyenlővé:

$$[2x(\sin 2\varphi + \operatorname{tg}\varphi) - 4y\cos^2\varphi]^2 = 4x^2(4+\operatorname{tg}^2\varphi),$$
$$2x(\sin 2\varphi + \operatorname{tg}\varphi) - 4y\cos^2\varphi = \pm 2x\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\varphi}, \text{ ebből}$$
$$y = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \sin 2\varphi \mp \sqrt{4+\operatorname{tg}^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}x.$$

Ha a feladatot úgy értelmezzük, hogy az edény oldalfala a vízfelszínnel tompaszöget zár be, akkor az ábra alapján könnyen megállapíthatjuk, hogy a kapott egyenes iránytangensének negatívnak kell lennie, így szükségképpen a burkológörbe az origón átmenő olyan egyenes, amelynek egyenlete:

$$y = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \sin 2\varphi - \sqrt{4+\operatorname{tg}^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}x.$$

Nagy Dezső (Bp., Piarista g. IV. o. t.)

II. megoldás: Tekintve, hogy t időpillanatban a vízrészecske sebességének vízszintes komponense $\sqrt{2gh}\cos\varphi$, függőleges komponense $\sqrt{2gh}\sin\varphi - gt$, a parabolák érintőjének iránytangense t függvényeként

$$m = \frac{\sqrt{2gh}\sin\varphi - gt}{\sqrt{2gh}\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi - \frac{g}{\sqrt{2gh}\cos\varphi}t, \text{ innen}$$
$$t = -\frac{\sqrt{2gh}}{g}\cos\varphi(m - \operatorname{tg}\varphi).$$

Ezzel a t paramétert kiküszöböljük:

$$x = h\operatorname{tg}\varphi - \frac{2gh}{g}\cos^2\varphi\,(m-\operatorname{tg}\varphi) = h(\operatorname{tg}\varphi - 2m\cos^2\varphi + \sin 2\varphi),$$
$$y = -h - \frac{2gh}{g}\sin\varphi\cos\varphi\,(m-\operatorname{tg}\varphi) - \frac{g}{2}\cdot\frac{2gh}{g^2}\cos^2\varphi\,(m-\operatorname{tg}\varphi)^2 =$$
$$= h(-1 - m\sin 2\varphi + 2\sin^2\varphi - m^2\cos^2\varphi + m\sin 2\varphi - 2\sin^2\varphi) =$$
$$= -h\cos^2\varphi(1+m^2).$$

Így $y/x = f(m)$, h-tól független (a φ-t rögzítettnek képzeljük); ez azt jelenti, hogy valamennyi parabolának m iránytangensű érintőjén levő pontja az $y = f(m)\cdot x$ egyenesen van. Tehát, ha $f(m) = m$, akkor a parabolasereg minden egyes tagja érinti az $y = mx$ egyenest, azaz ez a burkológörbe.

Határozzuk meg m-et az $f(m)=m$ egyenletből!

$$-\cos^2\varphi - m^2\cos^2\varphi = m\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2m^2\cos^2\varphi + m\sin 2\varphi,$$
$$m^2\cos^2\varphi - m(\mathrm{tg}\,\varphi + \sin 2\varphi) - \cos^2\varphi = 0, \text{ innen}$$

trigonometriai átalakításokkal:

$$m = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi + \sin 2\varphi - \sqrt{(\mathrm{tg}\,\varphi + \sin 2\varphi)^2 + 4\cos^4\varphi}}{2\cos^2\varphi} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi + \sin 2\varphi - \sqrt{4 + \mathrm{tg}^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}.$$

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. IV. o. t.)