I. megoldás: A feladatban szereplő deformációt egyértelműen ki lehet számítani, aszerint kell azonban levonni, vagy hozzáadni az eredeti hosszhoz (összenyomás, vagy megnyúlás), hogy a hatóerő támadáspontja a gyorsulás irányában nézve megelőzi-e a rugó pontjait, vagy követi-e azokat. Számítsuk ki a deformáció abszolút értékét! A rugó minden pontjára más és más deformáló erő hat. Az egyik végénél (a gyorsító erő támadáspontjánál) $P = Ma$ a deformációt okozó erő, a másik végénél 0. Ebből következik, hogy az eredeti rugón felvett egyenlő kis szakaszok különböző mértékben deformálódnak a gyorsulás alkalmával. A teljes deformációt kiszámíthatjuk oly módon, hogy a rugót hossza mentén beosztjuk képzeletben kis szakaszokra – amelyeken belül közelítőleg állandónak tételezhetjük fel a ható erőt –, majd ezen kis szakaszok „elemi" megnyúlásait összegezzük.

Osszuk fel a rugót n egyenlő részre. Egy-egy ilyen szakasz hossza l_0/n, tömege M/n, direkciós ereje $k \cdot n$, hiszen n-szer kisebb rugószakaszt n-szer nagyobb erővel kell ugyanakkorára megnyújtani (egységnyire). Jelöljük a P erő támadáspontjával ellentétes rugóvéget O-val, majd innen az egyes osztópontokat $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1)$ és n-nel.

O mögött (húzás esetén) nincs rugó, az $1.,\ 2.,\ 3.,\ \ldots,\ n.$ mögötti rugórész tömege $1\cdot M/n, 2\cdot M/n, 3\cdot M/n,\ \ldots,\ n\cdot M/n$, tehát ha a rugó minden pontja a gyorsulással mozog, akkor a $0.,\ 1.,\ 2.,\ 3.,\ \ldots,\ n.$ pontban ható erők rendre $0,\ 1\cdot Ma/n,\ 2\cdot Ma/n,\ 3\cdot Ma/n,\ \ldots,\ n\cdot Ma/n$. Az $\overline{O1}$ szakasz bármely belső pontjában 0-nál nagyobb, $1\cdot Ma/n$-nél kisebb erő hat, az $\overline{12}$ szakasz belső pontjaiban $1\cdot Ma/n$-nél nagyobb, $2\cdot Ma/n$-nél kisebb, a $\overline{23}$ szakasz belső pontjaiban $2\cdot Ma/n$-nél nagyobb, $3\cdot Ma/n$-nél kisebb stb. erő hat. Egy-egy rugószakasz bármely, a végpontoktól különböző pontjában nagyobb erő hat, mint a szakasz O felőli végpontjában, de ez az erő kisebb, mint az $n.$ felőli végpontjában fellépő erő. Most kiszámítjuk, mekkora lenne a rugó teljes megnyúlása, ha annak minden szakasza minden pontjában akkora erő működnék, mint az illető szakasz O felőli végpontjánál. Ekkor – az osztópontoktól eltekintve – mindenütt kisebb erőt veszünk, mint a valóságos feszítőerő, tehát a ténylegesnél kisebb λ' megnyúlást kapunk. Majd kiszámítjuk a megnyúlást úgy is, mintha minden szakasz minden pontjában akkora erő hatna, mint az illető szakasz $n.$ felőli végpontjában. Ekkor a ténylegesnél nagyobb erővel számolunk, tehát a ténylegesnél nagyobb λ'' megnyúlást kapunk. Ekkor írható: $\lambda' < \lambda < \lambda''$, amivel λ-ra két korlátot (alsó és felső) kapunk, (amelyek mindig közrefogják λ-t!). Ha most a beosztást egyre finomítjuk, azaz az osztópontok számát minden határon túl növeljük ($n \to \infty$), egyre inkább igaz lesz, hogy a kis szakaszok belső pontjaiban akkora erő működik, mint a végpontban számított erő. (Pontosabban: *az elhanyagolás egyre kisebbedik.)* Számítsuk ki a λ' és λ''-t!

Az alsó korlát kiszámításánál látjuk, hogy az $1.,\ 2.,\ 3.,\ \ldots,\ n.$ szakaszt $0,\ Ma/n,\ 2Ma/n,\ 3Ma/n,\ \ldots,\ (n-1)\cdot Ma/n$ erő feszíti. Az egyes megnyúlások tehát

$$\lambda_i' = \frac{P_i}{n\cdot k} \quad \text{alapján} \quad \lambda_i' = \frac{(i-1)\cdot \dfrac{Ma}{n}}{n\cdot k}.$$

Ezek összege adja meg a teljes megnyúlást:

$$\lambda' = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)\dfrac{M}{n}a}{n\cdot k} \equiv \frac{a\dfrac{M}{n}}{nk} + \frac{a\dfrac{2M}{n}}{nk} + \frac{a\dfrac{3M}{n}}{n\cdot k} + \ldots + \frac{a\dfrac{(n-1)M}{n}}{nk}.$$

Vagy a számtani sorozat összegképletének felhasználásával:

$$\lambda' = \frac{aM(1+2+3+\ldots+n-1)}{n^2k} = \frac{aM}{n^2k}\cdot\frac{1+n-1}{2}(n-1) = \\ = \frac{Ma}{2k}\cdot\frac{n-1}{n}.$$

Hasonlóképpen kapjuk λ''-re:

$$\lambda'' = \sum_{i=1}^{n} \frac{i\dfrac{M}{n}a}{n\cdot k} \quad \text{és} \quad \lambda'' = \frac{Ma}{2k}\frac{n+1}{n}.$$

Most már $\lambda' < \lambda < \lambda''$ alapján felírhatjuk:

$$\frac{n-1}{n}\cdot\frac{Ma}{2k} < \lambda < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{Ma}{2k},$$

vagy másképpen:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{Ma}{2k} < \lambda < \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{Ma}{2k}.$$

Ha n értékét minden határon túl növeljük, az „alsó közelítő összeg" egyre növekszik, a „felső közelítő összeg" pedig egyre csökken, azaz egyre inkább megközelítik egymást, és mivel a valódi megnyúlás mindig e két érték között van, egyre inkább megközelítik a valódi megnyúlás értékét! Mivel *a bal oldalon és a jobb oldalon szereplő sorozatnak a határértéke* (leolvashatóan) *egybeesik,* ez nem lehet más, mint λ. Így λ-ra, a valódi megnyúlásra kapjuk $n \to \infty$ esetén (mivel ekkor $1/n \to 0$), hogy

$$\lambda = \frac{Ma}{2k}. \quad \text{Így a rugó hossza: } l = l_0 \pm \frac{Ma}{2k}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

$$l = 80\ \text{cm} \pm \frac{50\ \text{g} \cdot 100\ \text{cm sec}^{-2}}{2 \cdot 0{,}2\ \text{pond} \cdot \text{cm}^{-1}} = 80\ \text{cm} \pm \frac{5000}{2 \cdot 0{,}2 \cdot 981}\ \text{cm, azaz}$$

$$l = 92{,}74\ \text{cm vagy}$$
$$l = 67{,}3\ \text{cm.}$$

Megjegyzés. Érdekes megfigyelni, hogy az így kapott megnyúlás feleakkora, mintha a rugó másik végét fallal támasztanánk meg (sztatikusan). A külső megtámasztás nélküli dinamikus esetben a feleakkora megnyúlást nem az okozza, hogy feleannyi a rá ható külső erő, hanem az erőhatás rugómenti lineáris csökkenése.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

II. megoldás: Az a gyorsulással mozgó rendszer helyettesíthető egy olyan gravitációs erőtérrel, amelynél g helyett a-t írunk. Ha a rugót gravitációs erőtérbe helyezzük, saját súlya alatt összenyomódik, mégpedig oly módon, hogy az alsó menetek sűrűbben helyezkednek el, mint a felsők, mert a meneteket terhelő súly felülről lefelé nő. Az 1 menetre eső terhelés a rugó mentén lineárisan változik Ma és 0 között, középértéke $Ma/2$. Ezzel az értékkel számolva:

$$\lambda = \frac{Ma}{1k}.\ \text{A megváltozott hossz: } l = l_0 \pm \frac{Ma}{2k}.$$

Számértékekkel:

$$l = 92{,}7\ \text{cm, vagy } 67{,}3\ \text{cm.}$$

Pósch Margit (Bp., Veres Pálné g. IV. o. t.)