I. Megoldás. Kimutatjuk, hogy

$$a_1!a_2!\dots a_n! < (a_1+a_2+\dots+a_n)!.$$

Ugyanis

$$a_1! = a_1!$$

$$a_2! = 1\cdot 2\cdot 3.\cdot\ldots\cdot a_2 < (a_1+1)(a_1+2)\dots(a_1+a_2) = \frac{(a_1+a_2)!}{a_1!},$$

$$a_3! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot a_3 < (a_1+a_2+1)(a_1+a_2+2)\dots(a_1+a_2+a_3) = \frac{(a_1+a_2+a_3)!}{(a_1+a_2)!},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$a_n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot a_n < \frac{(a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n)!}{(a_1+a_2+\dots+a_{n-1})!}.$$

A megfelelő oldalakat szorozva:

$$a_1!a_2!a_3!\dots a_n! < a_1!\frac{(a_1+a_2)!}{a_1!}\cdot\frac{(a_1+a_2+a_3)!}{(a_1+a_2)!}\dots\frac{(a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n)!}{(a_1+a_2+\dots+a_{n-1})!}.$$

A jobboldalon a számláló tényezői a nevezőben is előfordulnak, kivéve a legutolsót, tehát

$$a_1!a_2!a_3!\dots a_n! < (a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n)! < k!.$$

Egry György János (Kölcsey Ferenc g. VIII. o. Bp. VI.)

II. Megoldás. Legyen $a_1+a_2+\dots+a_n=s$. Ekkor $s!$ jelenti az s különböző elem permutációit.

Ha az s különböző elemet szakaszokra osztjuk, melyekben az elemek száma rendre a_1, a_2, $\dots$, a_n és ezen szakaszok elemeit egymás között permutáljuk, rendre $a_1!$, $a_2!$, $\dots$, $a_n!$ permutacióit kapunk. Ha továbbá ezen különböző szakaszokból keletkező permutációkat – a sorrendjük szerint – minden lehetséges módon összekapcsoljuk, keletkezik

$$a_1!\ a_2!\ \dots\ a_n!$$

permutáció, melyek mindegyike benne van az s elem összes $s!$ számú permutációi között. De ezekkel nem merítettük ki az összes $s!$ számú permutácót, mert ezek között vannak olyanok is, melyek az

$$a_1!,\ a_2!,\ \dots,\ a_n!$$

számú permutációk sorrendjének felcserélésével keletkeztek és olyanok is, amelyekben az előbbi n szakasz valamelyikéből egyik vagy másik elemet átteszünk egy másik szakaszba és így permutálunk. Eszerint

$$a_1!a_2!\dots a_n! < (a_1+a_2+\dots+a_n)! < k!.$$

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc g. VII. o. Bp. VI.)

III. Megoldás. A csoportosítások tanában

$$P = \frac{k!}{a_1!a_2!\dots a_n!}$$

ahol $\sum_{i=1}^{n} a_i \le k$, jelenti a k elemből alkotható permutációk számát, ha a k elem között a_1, ill. a_3, $\dots$, ill. a_n számú elem egyenlő, tehát P az egységnél nagyobb egész szám, még akkor is, ha $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$.

Királyhidi Gyula (Szent-László g. VIII. o. Bp. X.)