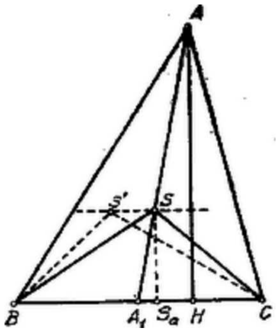
I. Megoldás. A háromszög S súlypontja az AA_1, BB_1, CC_1, oldalfelező transzverzálisoknak (súlyvonalak) közös pontja.

Az AA_1 súlyvonal az $ABC\Delta$-et és a $BCS\Delta$-et is két egyenlő területű részre osztja.

Az $ABC\Delta$ két része: ACA_1 és ABA_1 területre egyenlők, mert alapjuk egyenlő: $A_1C = A_1B$ és ehhez tartozó magasságuk, AH, közös.

A $BCS\Delta$ két része: BSA_1 és CSA_1 területre egyenlők, mert alapjuk egyenlő: $A_1C = A_1B$ és ehhez tartozó magasságuk, SS_a közös.



Ebből következik, hogy az ABA_1 és BSA_1 háromszögek területének különbsége egyenlő az ACA_1 és CSA_1 háromszög területének különbségével, azaz

$$t_{ABS} = t_{CAS}.$$

Hasonlóan következik, a BB_1 súlyvonal segítségével, hogy

$$t_{ABS} = t_{BCS}.$$

Eszerint a háromszög S súlypontja oly tulajdonságú, hogy

$$t_{ABS} = t_{BCS} = t_{CAS} = \frac{1}{3} t_{ABC}.$$

Tegyük fel, hogy volna még egy S-től ***különböző*** S' pont, amely ugyanolyan tulajdonságú, mint S, azaz

$$t_{ABS'} = t_{BCS'} = t_{CAS'} = \frac{1}{3} t_{ABC}.$$

Ebben az esetben $t_{ABS'} = t_{ABS}$; ez csak úgy lehetséges, hogy mivel e két háromszögnek közös alapja van, ha a magasságuk is egyenlő, vagyis $SS' \parallel AB$.

Ugyanígy $t_{BCS'} = t_{BCS'}$; ebből pedig $SS \parallel BC$.

Azonban $SS' \parallel AB$ és $SS' \parallel BC$ ellentmondás.

Tehát más pont, mint az S súlypont, nem bírhat a szóbanforgó tulajdonsággal.

II. Megoldás. Az S súlypont tulajdonságát előbb bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy az S-től különböző S' pont ugyanolyan tulajdonságú, mint az S súlypont. Ezen S' pont akkor beleesik pl. az $ABS\Delta$-be (ill. ennek AS vagy BS oldalára). Ekkor pedig

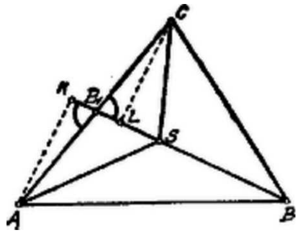
$$t_{ABS'} < t_{ABS} \quad \text{azaz} \quad t_{ABS'} < \frac{1}{3} t_{ABC}.$$

Kell tehát, hogy $t_{BCS'}$, vagy $t_{CAS'}$ nagyobb legyen, mint $\frac{1}{3} t_{ABC}$, azaz: S' nem bonthatja fel az $ABC\Delta$-et három egyenlő területű részre.

Kemény György (áll. Szent István rg. VII. o. Bp. XIV.)
Oroszhegyi Szabó Lajos (Kegyesrendi g. VIII. o. Bp. IV.)

III. Megoldás. Ha a BCS és ABS háromszögek területe egyenlő, akkor, mivel BS-t közös alapnak tekinthetjük, kell, hogy az ehhez tartozó magasságok is egyenlők legyenek: $AK = CL$. Ebből azonban következik, hogy ha BS az AC-t a B_1-ben metszi, $AB_1K\Delta\overset{\infty}{C}B_1L\Delta$. Ugyanis $K\sphericalangle = L\sphericalangle = 90^\circ$, továbbá az AK és CL befogókkal szembenfekvő szögek, mint csúcsszögek, egyenlők.

Ebből következik: $AB_1 = CB_1$ azaz az S pont a BB_1 oldalfelezőn (súlyvonalon) fekszik.



Hasonló meggondolással következik, hogy S az AA_1 ill. CC_1 oldalfelezőkön is rajta fekszik, tehát S a háromszög súlypontja.

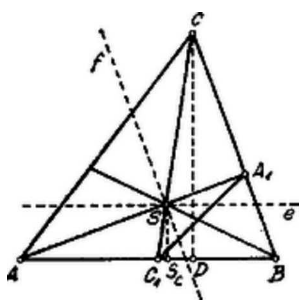
Sebestyén Gyula (Fazekas Mihály r. VII. o. Debrecen).

IV. Megoldás. Legyen az S pont olyan tulajdonságú, hogy

$$t_{ABS} = t_{BCS} = t_{CAS} = \frac{1}{3} t_{ABC}.$$

Az ABS és ABC háromszögeknek közös alapja AB; az elsőnek magassága SS_c, a másodiké $CD = m_c$. Minthogy

$$t_{ABS} = \frac{1}{3} t_{ABC}, \quad \text{kell, hogy} \quad SS_c = \frac{1}{3} CD = \frac{1}{3} m_c \quad \text{legyen.}$$



Eszerint kell, hogy S az AB oldallal párhuzamos e egyenesen feküdjék, melynek távolsága AB-től $\frac{1}{3} m_c$.[1]

Hasonlóan S a BC oldallal párhuzamos f egyenesen is fekszik, melynek távolsága BC-től $\frac{1}{3} m_a$.

e és f egyenesek meghatározzák az S pontot. Azt kell még kimutatnunk – és ez elegendő is – hogy AS és CS súlyvonalak.

Húzzuk meg az AS egyenest, mely BC-t az A_1, továbbá a CS egyenest, mely AB-t a C_1 pontban metszi. Nyilván

$$SA_1 = \frac{1}{3} AA_1 \quad \text{és} \quad SC_1 = \frac{1}{3} CC_1$$

ill.

$$AS : SA_1 = 2 : 1 \quad \text{és} \quad CS : SC_1 = 2 : 1, \quad \text{azaz} \quad AS : SA_1 = CS : SC_1.$$

Ebből következik, hogy $ASC\Delta \sim A_1 S_1 C\Delta$, mert: az S csúcsnál egyenlő szögük van és ezen szöget bezáró oldalak aránya egyenlő. Kimondhatjuk tehát, hogy $SA_1C_1\sphericalangle = SAC\sphericalangle$,
ill.

$$A_1C_1 \parallel AC \quad \text{és} \quad A_1C_1 = \frac{1}{2} AC.$$

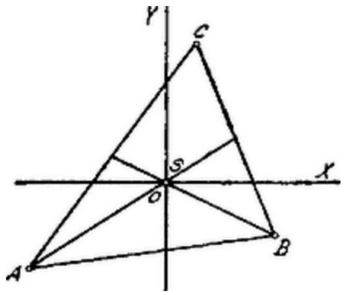
Ez azonban azt jelenti, hogy A_1 a BC, C_1 az AB oldal felezőpontja: AA_1 és CC_1 súlyvonalak és így S az $ABC\Delta$ súlypontja.

Kádár Géza (Dobó István r. VII. o. Eger)

V. Megoldás. Derékszögű koordinátarendszerünk kezdőpontját helyezzük abba az S pontba, amelyre nézve

(1) $$t_{ABS} = t_{BCS} = t_{CAS} \ldots$$

[1] Ilyen egyenes kettő van: azt kell vennünk, mely az AB azon oldalán fekszik, amelyen a C csúcs.



Az A, B, C csúcsok a pozitív forgás irányában következnek egymás után, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) koordinátákkal. Így az 1) feltétel

$$x_1y_2 - x_2y_1 = x_2y_3 - y_2x_3 = x_3y_1 - x_1y_3 \ldots \tag{2}$$

alakban írható és innen

$$(x_1 + x_3)y_2 = (y_1 + y_3)x_2 \ldots \tag{2a}$$

ill.

$$(x_2 + x_1)y_3 = (y_2 + y_1)x_3 \ldots \tag{2b}$$

vagy még

$$(x_3 + x_2)y_1 = (y_3 + y_2)x_1 \ldots \tag{2c}$$

Már most ezen összefüggések azonosak a következőkkel:

$$(x_1 + x_2 + x_3)y_2 = (y_1 + y_2 + y_3)x_2 \text{ azaz } \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} \ldots \tag{3a}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)y_3 = (y_1 + y_2 + y_3)x_3 \quad ,, \quad \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} \ldots, \tag{3b}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)y_1 = (y_1 + y_2 + y_3)x_1 \quad ,, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{x_1 + x_2 + x_3} \ldots. \tag{3c}$$

A (3a), (3b), (3c) egyenletek azonban azt fejezik ki, hogy az SB, SC, SA egyenesek keresztül mennek a háromszög súlypontján, mert

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

a háromszög súlypontjának koordinátái. Tehát S pont a háromszög súlypontja.

Jegyzet. A felsorolt megoldásokon kívül még számos dolgozat érkezett, különösen a IV. megoldásra, amelyek nem voltak figyelembe vehetők. Ugyanis ezen dolgozatok éppen azt mellőzik, amit bizonyítanunk kell. Nem szabad egyszerűen azt állítani, hogy mivel az S pontra nézve $SS_c = \frac{3}{1} m_c$ s. í. t., ez az S pont nem lehet más, mint a súlypont.

Ugyancsak nem voltak figyelembe vehetők az analitikai módszerrel dolgozók közül azok, amelyek a szóbanforgó területek egyenlőségének felírása után kijelentik, hogy az egyenletrendszer megoldása

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Valóban ezen megoldás sok és kényelmetlen számítással járna. Ebből csak az a tanulság, hogy kerüljük az ilyen eljárásokat. Helyesen jártak el azok, akik a koordinátarendszer kezdőpontját a háromszög egyik csúcsába, az egyik tengelyen pedig a háromszög egyik oldalát helyezték el.