I. Megoldás.

$$\text{Ha } n=1,\ \frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$n=2 \text{ mellett } \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.$$

$$n=3 \text{ esetben } \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$$

Tegyük fel, hogy a tétel igaz n-re, azaz

$$S_n\equiv\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Kimutatjuk, hogy a tétel igaz $n+1$-re is. Ugyanis

$$S_{n+1}\equiv S_n+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right).$$

$$\text{Azonban } \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}.$$

Ennek tekintetbe vételével, az egyenlet jobboldalán elmarad $\frac{1}{n+1}$

$$\text{és így}\qquad S_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2},$$

azaz S_{n+1} képezésének törvénye megegyezik S_n törvényével.
Minthogy a tétel igaz, ha $n=1,\ 2,\ 3$, igaz az n bármely értéke mellett.

Almássy György (Kegyesrendi g. VIII. o. Veszprém).

II. Megoldás. Minthogy (az előbbiek szerint)

$$\frac{1}{(2x-1)2x}=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{x},$$

a bebizonyítandó egyenlőség baloldala

$$\sum_1^n\left(\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x}\right)-\sum_1^n\frac{1}{x}$$

alakban írható. Azonban

$$\sum_1^n\left(\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2x}\right)=\sum_1^{2n}\frac{1}{x},$$

mert $\sum_1^n\frac{1}{2x-1}$ a $2n$-nél kisebb páratlan számok reciprok értékeinek és $\sum_1^n\frac{1}{2x}$ $2n$-nél nem nagyobb páros számok reciprok értékeinek összege és így a két összeg együttesen az 1-től $2n$-ig haladó összes egész számok reciprok értékeinek összege. Eszerint a szóbanforgó összeg valóban

$$\sum_1^{2n}\frac{1}{x}-\sum_1^n\frac{1}{x}=\sum_{n+1}^{2n}\frac{1}{x}=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Harsányi János (Ág. ev. g. VIII. o. Bp).