Egyenletünk baloldalán álló négyzetgyökök x valós értékű függvényei, ha

$$2x+1 \geq 0 \quad \text{és} \quad x+1 \geq 0, \quad \text{azaz ha} \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{ill.} \quad x \geq -1.$$

E két feltételt együttesen kielégíti

(1) $$x \geq -\frac{1}{2} \ldots$$

Az adott egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve, keletkezik

(2) $$2x+1+2\sqrt{(2x+1)(x+1)}+x+1=1 \quad \text{vagy} \quad 2\sqrt{(2x+1)(x+1)}=-3x-1 \ldots$$

A (2) baloldalán pozitív szám áll; kell, hogy a jobboldal is pozitív legyen, tehát

(3) $$-3x-1>0, \qquad \text{ill.} \qquad x<-\frac{1}{3} \ldots$$

Az (1) és (3) alatti feltételek összefoglalásával

(4) $$-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \ldots$$

Most már a (2) mindkét oldalán négyzetre emelve:

(5) $$4(2x^2+3x+1)=9x^2+6x+1 \qquad \text{vagyis} \qquad x^2-6x-3=0 \ldots$$

(5) megoldása

$$x=\frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{2}=3 \pm \sqrt{12}=3 \pm 2\sqrt{3}.$$

Ezen két érték közül csak a negatív felelhet meg az eredeti egyenletnek: $x'=3-2\sqrt{3}$. Ezen érték kielégíti a (4) feltételt; ugyanis

$$-\frac{1}{2}<3-2\sqrt{3} \sim -0{,}464<-\frac{1}{3}.$$

Helyettesítsük be x' ezen értékét az eredeti egyenletbe:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=1.$$

Taksony Károly (Ág. ev. g. VI. o. Bp.)

Kiegészítés. Az (5) egyenlet másik gyöke, t. i. $x''=3+2\sqrt{3}$, a

(6) $$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1 \ldots$$

egyenletet elégíti ki. Ugyanis

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})=1.$$

Ha a (6) egyenlet mindkét oldalán négyzetre emelünk, akkor

$$-2\sqrt{(2x+1)(x+1)}=-3x-1.$$

Ha itt újra négyzetre emelünk, akkor is az (5) egyenlethez jutunk.