A szóban forgó összeget, közös nevezővel,

$$f(n) \equiv \frac{n^5+5n^3+4n}{120} = \frac{n(n^2+1)(n^2+4)}{120}$$

alakban írhatjuk. Tekintettel arra, hogy $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, akkor lesz $f(n)$ egész szám, ha a számláló osztható 2^3, 3, 5 törzsszám-hatványokkal.

a) Oszthatóság 2^3-ével. Ha n páros szám, n^2 és így n^2+4 is a 4 többszöröse, tehát $n(n^2+4)$ osztható 2^3-ével.

Ha n páratlan, n^2 és n^2+4 is az. Most n^2+1 páros, de

$$n^2+1 = (2k+1)^2+1 = 4k^2+2k+2$$

csak 2-vel osztható.

Hogy $f(n)$ egész szám legyen, szükséges, hogy n páros szám legyen

b) Oszthatóság 3-mal. Ha $n = 3m$, akkor $f(n)$ számlálója osztható 3-mal.

Ha azonban $n = 3m \pm 1$, akkor

$$n^2+1 = 9m^2 \pm 6m + 2 \quad \text{és} \quad n^2+4 = 9m^2 \pm 6m + 5,$$

tehát a számláló egyik tényezője sem osztható 3-mal.

Hogy $f(n)$ egész szám legyen, szükséges, hogy n többszöröse legyen 3-nak.

c) Oszthatóság 5-tel. Ha $n = 5m$, akkor a számláló is osztható 5-tel.

Ha $n = 5m \pm 1$, akkor $n^2+4 = 25m^2 \pm 10m + 5$,
ha $n = 5m \pm 2$, akkor $n^2+1 = 25m^2 \pm 10m + 5$
többszöröse 5-nek. Eszerint a számláló n bármely értéke mellett osztható 5-tel.

Összefoglalva: hogy $f(n)$ egész szám legyen, szükséges és elegendő, hogy n többszöröse legyen 2-nek és 3-nak, tehát 6-nak is.

Császár Ákos (Érseki g. V. o. Bp. II.)